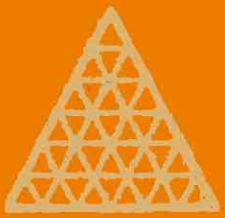
BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN R. P. R.

Jocuri și probleme distractive

de matematică



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — BUCUREȘTI, 1965

Autor: A. P. DOMOREAD
Traducere din limba rusă

CUPRINSUL

§ 1. Diverse sisteme de numeraţie 5
§ 2. Noţiuni de teoria numerelor 12
§ 3. Congruenţe 16
§ 4. Fracţii continue şi ecuaţii nedeterminate 20
§ 5. Triplete de numere pitagorice şi heronice 29
§ 6. Probleme distractive de aritmetică 30
§ 7. Scamatorii cu numere 33
§ 8. Calculul rapid 38
§ 9. Giganţi numerici 48
§ 10. Jocuri cu grămezi de obiecte 50
§ 11. Meleda 58
§ 12. Jocul lui Luc 60
§ 13. Solitarul 61
§ 14. Jocul cu 15 şi alte probleme asemănătoare 62
§ 15. Probleme de determinare a numărului de metode pentru atingerea unui scop 67
§ 16. Pătrate magice 76
§ 17. Pătratele lui Euler 81
§ 18. Distracţii cu jocul de domino 83
§ 19. Probleme referitoare la jocul de şah 84
§ 20. Întocmirea orarelor 93
§ 21. „Problema lui Josephus Flavius" şi altele asemănătoare . . . 96
§ 22. Probleme distractive cu deplasări de obiecte 98
§ 23. Procedee elementare pentru construirea unor ornamente . . 105
§ 24. Poligoane regulate din romburi 110
§ 25. Construirea unor figuri din elemente date 112
§ 26. Parchete 116
§ 27. Reconstituirea figurilor 122
§ 28. Construcţii de curbe — rozete 128
§ 29. Ornamente matematice 142
§ 30. Modele de poliedre 146
§ 31. Probleme distractive cu o foaie şi cu o fişie de hîrtie . . 152
§ 32. Problema celor patru culori 156
§ 33. Desenarea unor figuri dintr-o singură trăsătură 158
§ 34. Jocul lui Hamilton 161
§ 35. Aşezarea unor puncte în plan şi în spaţiu 163
§ 36. Probleme de judecată 165
§ 37. Diverse 171
§ 38. Note şi răspunsuri la probleme 181

§ 1. DIVERSE SISTEME DE NUMERAȚIE

În caietul unui amator de matematică au fost găsite următoarele însemnări :

$$\begin{array}{r} 3\,205 \\ + \\ \hline 4\,775 \\ \hline 10\,202 \end{array}$$

(cinci și cu cinci fac zece ; scriem 2, ținem minte 1 etc.)

$$\begin{array}{r} 435 \\ \times \\ \hline 47 \\ \hline 3\,713 \\ + \\ 2\,164 \\ \hline 25\,553 \end{array}$$

(șapte ori cinci fac treizeci și cinci ; scriem 3, ținem minte 4 etc.).

$$\begin{array}{r} 3\,217 \\ - \\ \hline 1\,452 \\ \hline 1\,545 \end{array}$$

$\sqrt{104\,231} = 273$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 47 & 442 \\ \times & \\ 7 & 421 \\ \hline 563 & 2\,131 \\ \times & \\ 3 & 2\,131 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\frac{17}{43} = \frac{3}{7}$$

(simplificînd cu 5)

$$\begin{array}{r|l} 361 & 14 \\ - & \\ 30 & 24{,}0525\ldots \\ \hline 61 & \\ - & \\ 60 & \\ \hline 100 & \\ - & \\ 74 & \\ \hline 40 & \\ - & \\ 30 & \\ \hline 100 \text{ etc.} & \end{array}$$

Prin urmare, $\frac{361}{14} = 24{,}0\ (52)$.

Verificarea : $0{,}0\ (52) = \frac{52}{770} = \frac{1}{14}$ (după simplificare cu 52) ;

$$24 + \frac{1}{14} = \frac{24 \cdot 14 + 1}{14} = \frac{361}{14}.$$

La prima vedere, toate aceste operații ne fac o impresie cît se poate de stranie, dar totul devine limpede, dacă ținem seama că operațiile au fost efectuate în sistemul de numerație cu baza 8.

În adevăr, potrivit metodei obișnuite de scriere a numerelor, diversele cifre ale unui număr N indică — în funcție de locul pe care-l ocupă (principiul pozițional !) — numărul de unități, de zeci, de sute etc., sau numărul de zecimi, sutimi etc., care intră în componența numărului N.

Dacă alegem ca bază a sistemului de numerație un număr natural arbitrar k, adică socotim că k unități din fiecare ordin (și nu zece ca în sistemul zecimal folosit de noi) formează o unitate a ordinului superior următor, ajungem la ceea ce se numește sistemul de numerație cu baza k.

Dacă $k < 10$, atunci cifrele de la k pînă la 9 devin inutile (nu este întîmplător că în toate exemplele de mai sus 8 și 9 nu figurează). Dacă însă $k > 10$, atunci pentru numerele cuprinse între 10 și $k-1$ trebuie să introducem simboluri — cifre speciale ; de exemplu, în sistemul de numerație cu baza 12, 10 și 11 se pot nota respectiv cu α și β.

Cînd scriem un număr în sistemul cu baza k este comod să indicăm între paranteze (în dreapta jos) baza sistemului scrisă în sistemul zecimal cu care sîntem obișnuiți ; de exemplu :

$$\left.\begin{aligned} 1\,101\ (\ _2) &= 1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2+1=13;\\ 20\,120\ (\ _3) &= 2\cdot 3^4+1\cdot 3^2+2\cdot 3=177;\\ \alpha\,13\,\beta\ (_{12}) &= 10\cdot 12^3+1\cdot 12^2+3\cdot 12+11=17\,471;\\ 1{,}672\ (\ _8) &= 1+\frac{6}{8}+\frac{7}{8^2}+\frac{2}{8^3}=\frac{477}{256}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

În ultimul exemplu avem în membrul întîi ceea ce se numește o fracție sistematică, corespunzătoare fracției zecimale în sistemul de numerație cu baza 10.

În cazurile cînd k are valori mari, cifrele de la 10 pînă la $k-1$ se pot scrie folosind sistemul zecimal și punînd deasupra numerelor-cifre o bară ; de exemplu :

$$\left.\begin{aligned} \overline{10}\ 0\ \ 6\ \overline{11}_{(16)} &= 10\cdot 16^3+6\cdot 16+11=4\,203;\\ 3\ \overline{13}\ \overline{12}\ \overline{41}_{(60)} &= 3\cdot 60^3+13\cdot 60^2+12\cdot 60+41=695\,561\\ 0{,}\overline{30}\ \ \overline{10}_{(60)} &= \frac{30}{60}+\frac{10}{60^2}=\frac{181}{360}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Din egalitățile (1) și (2) se vede că trecerea de la scrierea unui număr în sistemul cu baza k la scrierea sa în sistemul zecimal, mai comod pentru noi, este un lucru foarte simplu.

Nu este grea nici rezolvarea problemei inverse : să se scrie în sistemul cu baza k numărul natural N, scris în sistemul cu baza 10.

Fie

$$N = kq_1 + c_0,$$
$$q_1 = kq_2 + c_1,$$
$$q_2 = kq_3 + c_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$q_{n-2} = kq_{n-1} + c_{n-2},$$
$$q_{n-1} = kq_n + c_{n-1}.$$

Aici q_1 și c_0 sînt cîtul și restul obținut la împărțirea lui N prin k ; în general, q_{s+1} și c_s sînt cîtul și restul împărțirii lui q_s prin k. Fiecare dintre resturile $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ este mai mic decît k, dar mai mare sau egal cu 0 ; $0 < q_n < k$. De aici rezultă

$$N = (kq_2 + c_1)k + c_0 = q_2k^2 + c_1k + c_0 = (q_3k + c_2)k^2 + c_1k + c_0 = \ldots =$$
$$= q_nk^n + c_{n-1}k^{n-1} + c_{n-2}k^{n-2} + \ldots + c_2k^2 + c_1k + c_0 =$$
$$= q_nc_{n-1}c_{n-2}\ldots c_2c_1c_0 \ (k).$$

Este comod să efectuăm calculele după schema care reiese din următorul exemplu : să se exprime numărul **695 561** în sistemul de numerație cu baza **60** :

695 561 | 60			
60 | 11 592	60		
95	60 | 193	60	
60	559	180 | 3	
355	540	13	
300	192		
556	180		
540	12		
161			
120			
41			

Prin urmare :

$$695\,561 = 3\ \overline{13}\ \overline{12}\ \overline{41}_{(60)}$$

Dacă $N = a/b$, atunci pentru a-l scrie pe N în sistemul de numerație cu baza k, este suficient să scriem în acest sistem pe a și pe b ; fracția obținută poate fi reprezentată sub forma unei fracții sistematice în sistemul cu baza k, împărțind pe a prin b în sistemul cu baza

k. În acest caz, numărul a (vom considera că $a<b$) și resturile care se obțin în procesul împărțirii trebuie transformate în unități de ordin inferior, adăugînd la fiecare dintre ele un zero în dreapta (egale cu $\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k^3} \cdots$). Să scriem, de exemplu, $\frac{17}{18}$ în sistemul cu baza 12 și $\frac{4}{7}$ în sistemul cu baza 3 :

$$\frac{17}{18}=\frac{15_{(12)}}{16_{(12)}}=0,\overline{114}_{(12)},$$

$$\begin{array}{r|l} 15,0 & 16 \\ \hline 146 & 0,114 \\ \hline 60 & \\ 60 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

deoarece pentru $k=12$: $\frac{4}{7}=\frac{11_{(3)}}{21_{(3)}}=0,(120102)_{(3)}$,

deoarece

$$\begin{array}{r|l} 11,0 & 21 \\ \hline 21 & 0,120102\cdots \\ \hline 120 & \\ 112 & \\ \hline 100 & \\ 21 & \\ \hline 200 & \\ 112 & \\ \hline 11 \text{ etc.} & \end{array}$$

(ultimul rest $11_{(3)}$ coincide cu numărul inițial $a=11_{(3)}$, deci fracția sistematică căutată va fi o fracție periodică infinită).

Corectitudinea rezultatului se verifică ușor cu ajutorul următoarei reguli : pentru a transforma o fracție matematică periodică simplă scrisă în sistemul de numerație cu baza k într-o fracție ordinară numărul care figurează în perioada fracției sistematice trebuie împărțit printr-un număr scris prin tot atîtea cifre „$k-1$" cîte există în perioadă (demonstrați ([1])* această regulă, folosind formula pentru suma termenilor unei progresii geometrice infinite descrescătoare).

În cazul de față, $k=3$, deci

$$0,(120102)_{(3)}=\frac{120102_{(3)}}{222222_{(3)}}=\frac{11_{(3)}}{21_{(3)}}$$

(după simplificarea cu $10212_{(3)}$ — verificați !).

---

* Cifrele din parantezele rotunde fac trimiterea la § 38, note și răspunsuri la probleme.

Pentru ușurarea înmulțirii și împărțirii numerelor în sistemul cu baza k, este util să dispunem de o tablă a înmulțirii care ne dă produsele două cîte două ale numerelor, care nu depășesc pe k—1.

De exemplu, pentru $k=8$ și $k=12$ (tabela de mai jos) avem, respectiv :

$$5\times 6=36_{(8)};\ 5\times 7=2\,\beta_{(12)}$$

Demonstrați (²) că extragerea rădăcinii pătrate în orice sistem de numerație se efectuează la fel ca în sistemul zecimal (vezi exemplul de la începutul paragrafului).

	2	3	4	5	6	7
2	4	6	10	12	14	16
3	6	11	14	17	22	25
4	10	14	20	24	30	34
5	12	17	24	31	36	43
6	14	22	30	36	44	52
7	16	25	34	43	52	61

	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β
2	4	6	8	α	10	12	14	16	18	1α
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	α	13	18	21	26	2β	34	39	42	47
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	12	19	24	2β	36	41	48	53	5α	65
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
α	18	26	34	42	50	5α	68	76	84	92
β	1α	29	38	47	56	65	74	83	92	α1

Sistemul de numerație binar

În sistemul de numerație binar (cu baza 2) orice număr întreg poate fi scris cu ajutorul a două cifre 1 și 0 ; aceasta înseamnă că orice număr natural este o sumă de diverse puteri ale lui 2 :

$$N=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\ldots+2^{\alpha_s}\ (\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_s\geqslant 0).$$

Pe această proprietate a numerelor întregi se bazează un artificiu pentru ghicire a numerelor : pe cartoane avînd „ca titlu" numerele 1, 2, 4, 8, 16 (fig. 1), se scriu numerele întregi astfel ca orice număr N să figureze numai pe cartoane care au suma „titlurilor" egală cu N. De exemplu, 27 $(1+2+8+16)$ trebuie să lipsească numai de pe cartonul cu titlul 4 etc.

Cerîndu-i partenerului să se gîndească la un număr întreg, nu mai mare de 31, și să indice exact cartoanele pe care figurează acesta, putem „ghici" dintr-o dată numărul la care s-a gîndit, adunînd numerele din titlurile cartoanelor respective.

Artificiul poate fi „mecanizat" dacă scriem tabelele respective pe plăci cu greutatea de 1, 2, 4, 8, 16 g. Dacă plăcile care conțin numărul ce trebuie ghicit sînt așezate pe un dinamometru suficient de sensibil, indicatorul se va opri în dreptul numărului căutat.

Sistemul de numerație binar se folosește frecvent în mașinile electronice de calcul. În adevăr, elementele cu ajutorul cărora se reprezintă numerele în aceste mașini se pot afla în două stări ușor de

1	17
3	19
5	21
7	23
9	25
11	27
13	29
15	31

2	18
3	19
6	22
7	23
10	26
11	27
14	30
15	31

4	20
5	21
6	22
7	23
12	28
13	29
14	30
15	31

8	24
9	25
10	26
11	27
12	28
13	29
14	30
15	31

16	24
17	25
18	26
19	27
20	28
21	29
22	30
23	31

Fig. 1

deosebit una de cealaltă (de exemplu, încărcarea electrică pozitivă și negativă a unei porțiuni de dielectric, magnetizarea în două sensuri opuse a unei porțiuni de bandă magnetică etc.). Așadar, fiecare dintre elementele de acest fel poate fi folosit pentru reprezentarea unui ordin al numărului, exprimat în sistemul binar (o stare va corespunde lui 0 în ordinul respectiv, iar cealaltă lui 1). Prezintă importanță și faptul că este considerabil mai simplu să efectuăm operații numai cu două feluri de cifre (0 și 1).

Sistemul binar își găsește o aplicație și în teoria jocurilor cu trei grămezi de obiecte (§ 10).

Sistemul de numerație ternar

În sistemul de numerație ternar (cu baza 3), orice număr întreg poate fi scris cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2. Dacă introducem însă „cifre negative", cum se procedează, de exemplu, pentru scrierea logaritmilor cu caracteristică negativă, atunci, în virtutea egalității

$$2 \cdot 3^m = 3^{m+1} - 3^m = 1 \cdot 3^{m+1} + \bar{1} \cdot 3^m,$$

orice număr din sistemul ternar poate fi scris cu ajutorul cifrelor 0, 1, $\bar{1}$, deci are loc următoarea teoremă :

Teoremă. *Orice număr întreg este o sumă algebrică de diverse puteri ale lui 3, adică*

$$N = 3^{\gamma_1} + 3^{\alpha_2} + \ldots - 3^{\beta_1} - 3^{\beta_2} - \ldots, \qquad (3)$$

unde α_1, α_2,... β_1, β_2 ,... *sînt diverse numere întregi negative ; egalitatea* (3) *poate să nu conţină termeni negativi.*

De exemplu, pentru numărul 1910, avem : $N = 1910 = 2121202_{(3)}$ $= 2121211_{(3)} = 2122\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{(3)} = 213\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{(3)} = 220\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{(3)} = 3\bar{1}0\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{(3)} =$ $= 10\bar{1}0\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}_{(3)} = 3^7 - 3^5 - 3^3 - 3^2 + 3 - 3^0$ (în procesul transformărilor, 3 figurează temporar ca cifră).

De aici rezultă în mod firesc soluţia vechii probleme a celor patru greutăţi care ne permit să cîntărim pe o balanţă cu braţe egale orice greutate întreagă cuprinsă între 1 şi 40 kg[1].

În adevăr, aşezînd pe un taler al balanţei greutăţile de 3^{α_1} kg, 3^{α_2} kg etc., iar pe cealaltă 3^{β_1} kg, 3^{β_2} kg etc. vom putea cîntări N kg. Prin urmare, o garnitură de greutăţi de 1 kg, 3 kg, 9 kg, ..., 3n kg ne permite să cîntărim orice greutate întreagă de N kg, unde

$$N \leqslant 1 + 3 + 9 + \ldots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Pentru $n = 3$

$$\frac{3^{n+1} - 1}{2} = 40.$$

PROBLEME

1. Să se scrie (3^a) numerele 2713 şi 409 (în sistemul de numeraţie cu baza 5), cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2 (se admite utilizarea „cifrelor negative").

2. Verificaţi corectitudinea operaţiilor de la începutul paragrafului, pe două căi :

a) efectuînd toate operaţiile direct în sistemul cu baza 8 ;

---

[1] Problema greutăţilor a fost studiată încă în anul 1202 de către Leonardo din Pisa (Fibonacci).

b) scriind numerele cu care se efectuează diversele operaţii şi rezultatele acestora în sistemul zecimal.

3. Scrieţi $\frac{1}{7}$ şi $\frac{1}{16}$ sub formă de fracţii sistematice, în sistemele cu baza 2, 3, 12 şi 60.

Pentru verificare, transformaţi fracţiile sistematice obţinute în fracţii obişnuite.

4. După ce aţi scris numărul 676 în sistemele de numeraţie cu baza 2, 3, şi 5, extrageţi rădăcina pătrată a numerelor obţinute.

5. Să se arate ([3b]) că pentru trecerea de la sistemul de numeraţie cu baza 8 la cel binar este suficient ca fiecare cifră să fie exprimată sub forma unui număr de trei cifre în sistemul binar ; de exemplu,

$$7\,315_{(8)} = \underbrace{111}\ \underbrace{011}\ \underbrace{001}\ \underbrace{101}_{(2)};$$

şi invers :

$$\underbrace{10}\ \underbrace{000}\ \underbrace{101}\ \underbrace{110}_{(2)} = 2056_{(8)}.$$

Ţinînd seama de această regulă şi de regulile analoge pentru trecerea de la sistemele cu baza 4 şi 16 în sistemul binar etc., să se arate că

$$\overline{11}\ 4\ \overline{13}_{(16)} = 5515_{(8)} \text{ şi } 773_{(8)} = 13\,323_{(4)}.$$

6. Demonstraţi ([4]) că pentru orice $k > 5$, numărul $123\,454\,321_{(k)}$ este un pătrat perfect.

7. Cum putem determina ([5]) numărul natural N (egal cel mult cu 1000), la care s-a gîndit cineva, prin 10 întrebări, la care partenerul trebuie să ne răspundă numai „da" sau „nu" ?

8. Nu este o întîmplare că în figura 1 fiecare carton conţine cîte şaisprezece numere.

În general, dacă luăm s cartoane avînd în stînga sus numerele 1, 2, 4, 8, ..., 2^{s-2}, 2^{s-1} şi scriem orice număr m (cuprins între 1 şi 2^{s-1}) pe cartoane avînd suma numerelor din colţul de stînga sus egal cu m, atunci în fiecare carton vom avea cîte 2^{s-1} numere. Încercaţi să demonstraţi această teoremă ([6]).

§ 2. NOŢIUNI DE TEORIA NUMERELOR

Dacă pentru numerele a şi b putem alege un număr c, astfel încît $a = bc$, spunem că a este divizibil (sau se împarte exact) prin b şi că b este un divizor al numărului a (în paragraful de faţă, atunci cînd nu facem o menţiune specială, este vorba despre numere naturale.)

Numărul p se numește *prim*, dacă el nu are decît doi divizori pozitivi : 1 și p.

Orice număr compus (adică neprim) n poate fi scris sub forma :

$$n=p_1^{\alpha}\, p^{\beta}\ldots p_k^{\sigma}, \qquad (1)$$

unde p_1, p_2, ... p_k sînt prime, iar α, β, ..., σ sînt numere naturale, oarecare ; dacă, în aceste condiții, toate numerele p_1, p_2, ..., p_k sînt distincte, atunci (1) se numește descompunerea *canonică* în factori primi a numărului n.

În orice curs de teoria numerelor se demonstrează următoarea :

Teoremă. *Pentru orice număr n există o singură descompunere canonică*, (dacă nu considerăm distincte descompunerile care diferă între ele numai prin ordinea factorilor).

Unora dintre cititori li s-ar putea părea curios faptul că matematicienii depun eforturi pentru a demonstra teoreme atît de „evidente". Următorul exemplu însă, luat dintr-un alt domeniu de numere (nu din cel al numerelor naturale), ne arată că o teoremă cu totul analogă și în aparență „evidență" poate să nu fie adevărată.

Vom spune că un număr complex de forma $a+b\sqrt{-6}$, unde a și b sînt numere întregi arbitrare, este „compus", dacă el poate fi scris sub forma

$$a+b\sqrt{-6}=(c+d\sqrt{-6})\,(e+f\sqrt{-6}),$$

unde c, d, e, f sînt numere întregi oarecare (care, într-un caz particular, pot fi și egale cu zero), iar fiecare dintre factori este diferit de 1 și de —1. În caz contrar, vom spune că numărul este prim.

Conform acestei definiții, numerele $20-\sqrt{-6}$, 7 (aici $a=7$ și $b=0$) și 6 ($a=6$, $b=0$) vor fi numere compuse :

$$20-\sqrt{-6}=(2-3\sqrt{-6})\,(1+\sqrt{-6}),$$

$$7=(1+\sqrt{-6})\,(1-\sqrt{-6}),$$

$$6=2\cdot 3=(\sqrt{-6})\,(-\sqrt{-6}).$$

Se poate demonstra acum că numerele $\sqrt{-6}$, $-\sqrt{-6}$, 2, 3 sînt numere „prime". Prin urmare, numărul „compus" 6 se descompune în două moduri diferite în factori „primi" !

Funcțiile $\tau(n)$ și $S(n)$

Să notăm cu $\tau(n)$ numărul de divizori pozitivi ai numărului n, iar cu $S(n)$ suma lor.

De exemplu, $\tau(10)=4$ și $S(10)=18$, deoarece numărul 10 are numai patru divizori pozitivi: 1, 2, 5, 10.

Dacă $n=p_1^{\alpha}p_2^{\beta}p_3^{\gamma}\ldots p_k^{\sigma}$ este descompunerea canonică a numărului n, atunci

$$\tau(n)=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\sigma+1). \tag{2}$$

$$S(n)=(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha})(1+p_2+\ldots+p_2^{\beta})\times$$
$$\times(1+p_3+\ldots+p_3^{\gamma})\ldots(1+p_k+\ldots+p_k^{\sigma}). \tag{3}$$

În adevăr, orice număr de forma

$$p_1^{\alpha'}p_2^{\beta'}p_3^{\gamma'}\ldots p_k^{\sigma'}, \tag{4}$$

în care

$$0\leqslant\alpha'\leqslant\alpha;\quad 0\leqslant\beta'\leqslant\beta;\quad 0\leqslant\gamma'\leqslant\gamma;\quad 0\leqslant\sigma'\leqslant\sigma, \tag{5}$$

va fi un divizor al numărului n. Deoarece α' poate fi ales în $(\alpha+1)$ moduri, β' poate fi ales în $(\beta+1)$ moduri etc., înseamnă că avem $(\alpha+1)(\beta+1)$ moduri de a alege perechea de numere α',β' (cu fiecare valoare concretă a lui α' putem combina fiecare dintre cele $\beta+1$ valori ale lui β'), iar pentru alegerea tripletului de numere α', β', γ' există $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ moduri (orice pereche concretă α', β' poate fi combinată cu oricare dintre cele $\gamma+1$ valori ale numărului γ').

Continuînd acest raționament, ne vom convinge că grupul de numere α', β', γ', ..., σ', care satisfac condițiile (5) poate fi ales în $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\sigma+1)$ moduri. Prin urmare, formula (2) este corectă. Faptul că formula (3) este adevărată rezultă din faptul că la înmulțirea polinoamelor din membrul al doilea al acestei relații, obținem o sumă cu tot felul de termeni de forma (4).

Dacă $S(n)=2n$, numărul n se numește *perfect*.

De exemplu, 6 și 28 sînt numere perfecte, deoarece $S(6)=12$ și $S(28)=56$.

Încă Euclid a stabilit că numerele pare de forma

$$N=2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1), \tag{6}$$

unde α este un număr natural, iar $2^{\alpha+1}-1$ este prim, sînt perfecte. Pe de altă parte, nu există numere perfecte pare cu o altă descompunere canonică.

Deocamdată s-a stabilit că numerele de forma $2^{\alpha+1}-1$ (denumite numerele lui Mersenne, după numele unui învățat francez din

secolul al XVII-lea) sînt prime pentru $a = 1, 2, 4, 6, 12, 16, 18, 30, 60, 88, 106, 126, 520, 606, 1\,278, 2\,202, 2\,280$; prin urmare, deocamdată nu sînt cunoscute decît șaptesprezece numere perfecte.

Primele șapte numere perfecte sînt :

6, 28, 496, 8 128, 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328.

Pînă în prezent nu se știe dacă există numere perfecte impare.

Matematicienii mistici din Evul Mediu au acordat multă atenție așa-numitelor numere *amicale*, adică unor numere a și b pentru care $S(a) = S(b) = a + b$. Aplicînd formula (3), demonstrați că 220 și 284 sînt numere amicale ; de asemenea, pentru numerele 18 416 și 17 246.

Funcția (x) (partea întreagă a lui x)

Funcția $[x]$ este egală cu cel mai mare număr întreg care nu depășește pe x (x este un număr real arbitrar). De exemplu,

$$[\sqrt{7}] = 2, \left[-\frac{19}{5}\right] = -4, \ [6] = 6.$$

Funcția $[x]$ are „puncte de discontinuitate" ; pentru valori întregi ale lui x, ea „variază în salturi".

În figura 2 este reprezentat graficul acestei funcții, unde extremitatea din stînga a fiecărui segment orizontal aparține graficului (punctele negre), iar extremitatea din dreapta nu-i aparține.

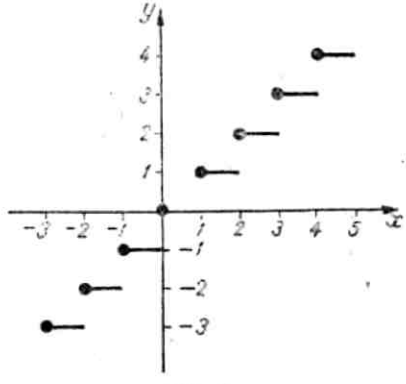


Fig. 2

Încercați să demonstrați (⁷) că dacă $n! = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} p_3^{\gamma} \dots p_k^{\sigma}$ este descompunerea canonică a numărului $n!$, atunci $\alpha = \left[\frac{n}{p_1}\right] + \left[\frac{n}{p_1^2}\right] + \left[\frac{n}{p_1^3}\right] + \dots$; formule analoge au loc și pentru $\beta, \gamma, \dots, \sigma$.

Cunoscînd aceasta, este ușor să stabilim, de exemplu, cîte zerouri va avea la sfîrșit numărul 100 ! În adevăr, fie $100! = 2^{\alpha} 3^{\beta} 5^{\gamma} \dots 97^{\gamma}$. Atunci

$$\alpha = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{4}\right] + \left[\frac{100}{8}\right] + \left[\frac{100}{16}\right] + \left[\frac{100}{32}\right] + \left[\frac{100}{64}\right] + \left[\frac{100}{128}\right] + \dots = 50 + 25 +$$

$$+ 12 + 6 + 3 + 1 = 97 \text{ și } \gamma = \left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{25}\right] + \dots = 20 + 4 = 24$$

Prin urmare, 100 ! este divizibil prin $(2 \cdot 5)^{24}$, adică acest număr se termină cu douăzeci și patru de zerouri.

1. Să se demonstreze ([8]) că, potrivit formulei (6) pentru $\alpha = 2\,230$ obținem un număr perfect cu 1 373 cifre ($\lg 2 \approx 0{,}301\,029\,996$).

2. Folosind formula (3) demonstrați ([9]) că pentru $N = 2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)$, unde $2^{\alpha+1}-1$ este prim, avem $S(N) = 2N$.

3. Să se afle cel mai mare număr natural k pentru care $\frac{101 \cdot 102 \ldots 999 \cdot 1000}{7^k}$ va fi un număr întreg ([10]).

4. Să se arate ([11]) că $1\,322\,314\,049\,613\,223\,140\,496 = 363\,636\,364^2$ este cel mai mic pătrat perfect care se scrie în sistemul zecimal prin două numere egale scrise unul în continuarea celuilalt (în alte sisteme de numerație problema admite soluții cu numere mai mici, de exemplu: $11_{(3)} = 2^2$; $882\,882_{(23)} = 7\,332^2$; $288\,288_{(23)} = 3\,900^2$). Căutați cuburi perfecte scrise într-un anumit sistem de numerație prin două numere egale puse unul după altul (de exemplu, $2^3 = 11_{(7)}$; $\underbrace{101\,101\,001}\,\underbrace{101\,101\,001}_{(2)} = 57^3$).

§ 3. CONGRUENȚE

Dacă numerele întregi a și b dau resturi egale cînd sînt împărțite prin numărul natural m, adică $a = mq_1 + r$ și $b = mq_2 + r$ (r, q_1, q_2 sînt numere întregi și $0 \leqslant r < m$), spunem că ele *dau resturi egale modulo* m sau că sînt *congruente modulo* m și scriem $a \equiv b \pmod{m}$. De exemplu, $27 \equiv -13 \pmod 8$, deoarece $27 = 3 \cdot 8 + 3$ și $-13 = 8(-2) + 3$. Evident, diferența $a - b$ a unor numere congruente modulo m va fi divizibil prin m. În cazul nostru, $27 - (-13) = 40$; 40 este divizibil prin 8.

Îi propunem cititorului să demonstreze următoarele proprietăți ale congruențelor:

dacă $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$, atunci

1) $a + c \equiv b + d \pmod m$,

2) $a - c \equiv b - d \pmod m$

3) $k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod m$, ($k$ este un număr întreg oarecare),

4) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$,

5) $a^n \equiv b^n \pmod m$,

(n este un număr natural oarecare). (Se va lua în considerare că $a = b + mt$, $c = d + mt'$, unde t și t' sînt întregi).

Din proprietățile enumerate mai sus, obținem cu ușurință ([12]) următoarea teoremă: *Dacă* $\alpha \equiv \beta \pmod m$ *și* $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ *este un polinom cu coeficienți întregi, atunci* $f(\alpha) \equiv f(\beta) \pmod m$.

Cu ajutorul acestei teoreme putem deduce criteriile de divizibilitate prin 7, 9, 11, 13 pentru un număr natural N.

Fie $N=c_k c_{k-1} c_{k-2} \ldots c_2 c_1 c_0 (10) = c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + c_2 10^2 + c_1 10 + c_0 = C_s 1000^s + C_{s-1} 1000^{s-1} + \ldots + C_2 1000^2 + C_1 1000 + C_0$;

aici $C_0, C_1, \ldots, C_{s-1}$ sînt numere obținute prin despărțirea de la dreapta spre stînga a numărului N în grupe de cîte trei cifre, $s=\left[\frac{k}{3}\right]$, iar numărul C_s poate fi de una, de două sau de trei cifre (de exemplu, $N=15\,032\,104\,341=341+104\cdot 1\,000+32\cdot 1\,000^2+15\cdot 1000^3$; aici $s=3$, $C_0=341$, $C_1=104$, $C_2=32$ și $C_3=15$).

Introducînd notațiile

$$c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \ldots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = f(z),$$

$$C_s z^s + C_{s-1} z^{s-1} + \ldots + C_1 z + C_0 = F(z),$$

vom avea $N=f(10)=F(1\,000)$,

$f(1)=c_k+c_{k-1}+\ \ldots\ +c_2+c_1+c_0=\sigma\ (N)$ (suma cifrelor numărului N),

$f(-1)=c_0-c_1+c_2-\ldots+(-1)^k c_k=\sigma'(N)$,

$F(-1)=C_0-C_1+C_2-\ldots+(-1)^s C_s=\Sigma'(N)$;

vom denumi convențional ultimele două sume *suma algebrică a cifrelor* și *suma algebrică a grupelor de cîte trei cifre, ale* numărului N.

Dat fiind că $10\equiv 1 \pmod 9$, vom avea, în virtutea teoremei de mai sus, $f(10)\equiv f(1) \pmod 9$ sau $N\equiv\sigma(N) \pmod 9$, adică N împărțit prin 9 ne dă același rest ca și $\sigma(N)$, din care cauză N este divizibil prin 9 dacă și numai dacă $\sigma(N)$ se împarte prin 9.

Analog, din congruența $10\equiv -1 \pmod{11}$, avem $f(10)\equiv f(-1) \pmod 9$ sau $N\equiv\sigma'(N) \pmod{11}$; prin urmare, N este divizibil prin 11 dacă suma algebrică a cifrelor numărului N se împarte prin 11 (și reciproc !).

Din congruențele $1\,000\equiv -1 \pmod 7$ $1\,000\equiv -1 \pmod{11}$ și $1\,000\equiv -1 \pmod{13}$, care se verifică ușor, rezultă :

$$F(1\,000)\equiv F(-1) \pmod 7, \qquad F(1\,000)\equiv F(-1) \pmod{11}$$

și $$F(1\,000)\equiv F(-1) \pmod{13},$$

sau

$$N \equiv \Sigma'(N) \pmod 7, \qquad N \equiv \Sigma'(N) \pmod{11},$$
$$N \equiv \Sigma'(N) \pmod{13},$$

adică N este divizibil prin 7, dacă suma algebrică a grupelor de cîte trei cifre ale numărului N se împarte prin 7 (și reciproc !) ; tot astfel se enunță criteriile de divizibilitate prin 11 și prin 13.

Analog se stabilesc și criteriile de divizibilitate a numerelor scrise în sistemul de numerație cu baza k, pentru $k-1$ și $k+1$; numărul N este divizibil prin $k-1$ (sau prin $k+1$), dacă și numai dacă suma cifrelor sale (suma algebrică a cifrelor), atunci cînd N este scris în sistemul cu baza k, este divizibilă prin $k-1$ (prin $k+1$). Stabiliți aceste criterii !

Să se afle criteriile de divizibilitate prin cinci și treisprezece în sistemul de numerație cu baza 8 ; prin doi, patru și șapte în sistemul cu baza 3 ; prin treisprezece și opt în sistemul cu baza 5 ([13]).

Cu ajutorul congruențelor se rezolvă ușor probleme de felul următor: să se afle restul obținut la împărțirea numărului $N = 13^{69} + 48 \cdot 10^{50}$ prin 17. Evident, trebuie să găsim cel mai mic număr nenegativ congruent cu N modulo 17 ; aplicînd o proprietate a congruențelor, obținem $13^{69} + 48 \cdot 10^{50} \equiv (-4)^{69} - 3 \cdot 100^{25} \equiv 4 \cdot 16^{34} - 3(-2)^{25} \equiv -4(-1)^{34} + 6 \cdot 16^6 \equiv -4 + 6(-1)^6 \equiv 2 \pmod{17}$; prin urmare, resul căutat este egal cu doi.

Să se afle ([14]), pe aceeași cale, ultimele două cifre ale numerelor 293^{293}, 2^{1000}, $69^{69} + 31^{31}$.

Funcția lui Euler

Se numește *funcția lui Euler* $\varphi(n)$ (n natural) numărul de numere mai mici decît n și prime cu n. Să se arate că

pentru $n =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	20	36
$\varphi(n) =$	1	2	2	4	2	6	4	6	4	4	8	12

(de exemplu, $\varphi(10) = 4$, deoarece dintre numerele mai mici decît zece, numai patru numere 1, 3, 7, 9 sînt prime cu zece). Se consideră $\varphi(1) = 1$.

Se demonstrează ușor ([15]) că pentru p prim avem $\varphi(p) = p - 1$ și $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

În teoria numerelor se demonstrează că pentru numerele a și b, prime între ele, $\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$. De aici rezultă că dacă $n = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \ldots p_k^{\lambda}$ este descompunerea canonică a numărului n, atunci

$$\varphi(n) = \left(p_1^{\alpha} - p_1^{\alpha-1}\right)\left(p_2^{\beta} - p_1^{\beta-1}\right) \ldots \left(p_k^{\lambda} - p_k^{\lambda-1}\right). \qquad (1)$$

Gauss a demonstrat că suma valorilor funcției lui Euler, calculată pentru toți divizorii numărului n, este egală cu numărul n. De exemplu,

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(5)+\varphi(10)=1+1+4+4=10.$$

Euler a demonstrat că dacă numerele k și n sînt prime între ele, avem întotdeauna $k^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$; în particular, dacă p este prim și a nu este divizibil prin p, atunci $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$ („teorema mică a lui Fermat").

Recomandăm cititorului să verifice pe exemple valabilitatea teoremelor lui Euler, Gauss și Fermat, precum și a formulei (1).

Din teorema lui Euler rezultă că, dacă numerele k și n sînt prime între ele, „congruența exponențială" $k^z\equiv 1 \pmod{n}$ va avea ca soluție $z=\varphi(n)$; se poate întîmpla însă ca congruența să se verifice și pentru valori mai mici ale lui z.

Cel mai mic număr natural z_0 care satisface această congruență se numește *exponentul căruia îi aparține k modulo n*. Se poate demonstra ([16]) că z_0 va fi în mod necesar un divizor al numărului $\varphi(n)$. De exemplu, pentru a afla cea mai mică rădăcină a congruenței $60^z\equiv 1 \pmod{17}$, trebuie să încercăm toți divizorii numărului $\varphi(17)=16$. Deoarece $60^z\equiv 9^z \pmod{17}$ și $9^2\equiv -4 \pmod{17}$, $9^4\equiv(-4)^2\equiv -1 \pmod{17}$, $9^8\equiv 1 \pmod{17}$, rezultă că 60 aparține exponentului 8 modulo 17.

Dacă fracția ireductibilă m/n va fi scrisă sub forma unei fracții sistematice în sistemul de numerație cu baza k (k și n sînt prime între ele), atunci numărul de cifre din perioada acestei fracții va fi egal ([17]) cu exponentul z_0, căruia îi aparține k modulo n. De exemplu, dacă scriem fracția $\frac{1}{17}$ sub forma unei fracții sistematice în sistemul de numerație cu baza 60, vom avea în perioada fracției infinite 8 cifre. Convingeți-vă personal, împărțind pe 1 prin 17, că $\frac{1}{17}=$ $=0,\ (3\ \overline{31}\ \overline{45}\ \overline{52}\ \overline{56}\ \overline{28}\ \overline{14}\ 7)_{(60)}$.

Să se afle, pe aceeași cale, numărul de cifre din perioadele fracțiilor zecimale infinite corespunzătoare fracțiilor ordinare $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{2}{19}$ și verificați rezultatele prin împărțirea directă cu 7, cu 13 și cu 19.

§ 4. FRACȚII CONTINUE ȘI ECUAȚII NEDETERMINATE

Orice număr rațional pozitiv $\frac{a}{b}$ (a și b sînt numere naturale) poate fi scris sub forma unei așa-numite fracții *continue*.

Să admitem că la împărțirea lui a prin b obținem cîtul $q_0 = \left[\frac{a}{b}\right]$ și restul r_1. Împărțind pe b prin r_1 obținem cîtul q_1 și restul r_2; împărțind pe r_1 prin r_2, obținem cîtul q_2 și restul r_3 etc. Într-o anumită etapă r_{n-1} va fi neapărat divizibil prin r_n ($r_{n-1} : r_n = q_n$).

În teoria numerelor se demonstrează că $r_n = (a, b)$ ((a, b) este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b). Procesul aflării celui mai mare divizor comun a două numere prin împărțiri consecutive se numește *algoritmul lui Euclid*.

De obicei, împărțirea se scrie în forma strînsă

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline bq_0 & q_0 \\ \hline b & r_1 \\ \hline q_1 r_1 & q_1 \\ \hline r_1 & r_2 \\ \hline r_2 q_2 & q_2 \\ \hline r_2 & \\ \hline \cdots & \\ r_{n-1} & r_n \\ \hline q_n r_n & q_n \\ \hline 0 & \end{array}$$

Evident,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}} =$$

$$= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = \ldots = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}.$$

Aceasta este fracția continuă pe care o căutam. Ea se scrie adesori sub forma

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}}},$$

unde fiecare dintre unități se împarte prin întreaga expresie scrisă dedesubtul ei.

Fracția continuă se scrie comod și sub următoarea formă convențională:

$$\frac{a}{b}=[q_0,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{n-1},\ q_n],$$

unde se indică numai așa-numitele *cituri parțiale*:

$$q_0,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{n-1},\ q_n.$$

De exemplu,

$$\frac{173}{39}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=[4,\ 2,\ 3,\ 2,\ 2],$$

deoarece

$$\begin{array}{r|l} 173 & 39 \\ \hline 156 & 4 \\ \hline 17 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 39 & 17 \\ \hline 34 & 2 \\ \hline 5 & \\ \hline 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline 15 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Dacă vom secționa fracția la al k-lea cit parțial, atunci scriind fracția continuă scurtată $[q_0, q_1, ..., q_{k-1}, q_k]$ sub forma unei fracții obișnuite vom obține redusa de ordinul k: P_k/Q_k. Evident, $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a}{b}$.

Redusele au o serie de proprietăți importante.

Proprietatea 1. Numărătorii și numitorii a trei reduse consecutive sînt legați prin relațiile de recurență:

$$P_{k+1}=P_k q_{k+1}+P_{k-1};\ Q_{k+1}=Q_k q_{k+1}+Q_{k-1}, \tag{1}$$

care ne permite să calculăm fără dificultate redusele după cîturile parțiale cunoscute.

Calculînd pentru fracție $\frac{173}{39}$ valorile $\frac{P_0}{Q_0}=4=\frac{4}{1}$ și $\frac{P_1}{Q_1}=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$, găsim celelalte reduse după formulele (1). Este comod să scriem rezultatele calculelor sub forma unei tabele:

k	0	1	2	3	4
q_k	4	2	3	2	2
P_k	4	9	31	71	173
Q_k	1	2	7	16	39

De exemplu:

$$P_2=P_1q_2+P_0=9\cdot 3+4=31$$
$$Q_2=Q_1q_2+Q_0=2\cdot 3+1=7$$

etc.

Proprietatea 2. Totdeauna:

$$\frac{P_0}{Q_0}<\frac{P_2}{Q_2}<\frac{P_4}{Q_4}<\ldots<\frac{a}{b}=\frac{P_n}{Q_n}<\ldots<\frac{P_5}{Q_5}<\frac{P_3}{Q_3}<\frac{P_1}{Q_1}.$$

Proprietatea 3. Pentru orice k, avem:

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k-1}} \tag{2}$$

sau

$$P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}=(-1)^{k-1} \tag{3}$$

De aci rezultă că $(P_k, Q_k)=1$, deoarece altfel (adică pentru $(P_k, Q_k)>1$) expresia $P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}$, egală cu $(-1)^{k-1}$, nu poate fi divizibilă prin numărul (P_k, Q_k).

Dacă $(a, b)=1$, atunci din $\frac{a}{b}=\frac{P_n}{Q_n}$ rezultă că $a=P_n$ și $b=Q_n$ iar din (3) obținem, pentru $k=n$,

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=(-1)^{n-1} \tag{4}$$

Egalitatea (4) ne dă cheia pentru rezolvarea în numere întregi a așa-numitei ecuații *nedeterminate*

$$ax+by=c, \tag{5}$$

unde a, b și c sînt numere întregi, iar $(a, b)=1$.

În adevăr, transcriind relația (4) sub forma

$$a(-1)^{n-1}\ cQ_{n-1}+b(-1)^n\ cP_{n-1}=c,$$

putem afirma că numerele

$$x_0=(-1)^{n-1}cQ_{n-1},\ y_0=(-1)^n cP_{n-1} \tag{6}$$

reprezintă o soluție în numere întregi a ecuației (5).

Se poate demonstra ([18]) că:

1) toate celelalte soluții ale ecuației (5) se obțin din (6) după formulele $x=x_0+bt$; $y=y_0-at$, unde t este un întreg oarecare;

2) ecuația $ax+by=c$, în cazul cînd $(a, b)>1$, nu se rezolvă în numere întregi, dacă c nu este divizibil prin (a, b); (dacă însă c este divizibil prin (a, b) atunci simplificînd toți termenii ecuației (5) cu (a, b), ajungem la ecuația $a'x+b'y=c'$, unde $(a', b')=1$).

Să ilustrăm cele de mai sus cu ajutorul unui exemplu.

Într-o cutie în care se găsesc păianjeni și cărăbuși, numărăm cu totul 38 de picioare. Cîți păianjeni (x) și cîți cărăbuși (y) sînt în cutie dacă un păianjen are 8 picioare iar un cărăbuș 6?

Evident, $8x+6y=38$ sau $4x+3y=19$. Aici $a=4$, $b=3$, $c=19$. Pentru fracția continuă $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$, avem: $\frac{P_0}{Q_0}=\frac{1}{1}$ și $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{4}{3}$.

Prin urmare,

$$x_0=(-1)^{1-1}\cdot 19\cdot 1=19,\qquad y_0=(-1)^1\cdot 19\cdot 1=-19,$$

de unde rezultă:

$$x=19+3t;\qquad y=-19-4t.$$

Dat fiind sensul problemei, ne interesează numai valorile nenegative ale lui x și ale lui y, adică trebuie să avem: $19+3t\geqslant 0$ și $-19-4t\geqslant 0$ sau $-\frac{19}{3}\leqslant t\leqslant -\frac{19}{4}$. Pentru $t=-5$, avem $x_1=4$;

$y_1=1$ (4 păianjeni și 1 cărăbuș), iar pentru $t=-6$, obținem $x_1=1$, $y_1=5$ (un păianjen și cinci cărăbuși).

Vom indica și o altă cale pentru rezolvarea ecuației (5). Să o scriem sub forma $ax-c=-by$. Evident, trebuie să găsim valorile întregi ale lui x pentru care diferența $ax-c$ este divizibilă prin b, adică:

$$ax\equiv c \pmod b. \tag{7}$$

Această condiție este satisfăcută de $x\equiv c\,a^{\varphi(b)-1} \pmod b$.

În adevăr, introducînd această valoare în congreuența (7), obținem $a\,a^{\varphi(b)-1}\equiv c\cdot 1 \pmod b$ (ultima transformare s-a făcut pe baza teoremei lui Euler).

De exemplu, pentru ecuația $4x+3y=19$, avem: $x\equiv 19\cdot 4^{\varphi(3)-1} \pmod 3 \equiv 1\cdot 1^{2-1} \pmod 3$ sau $x=1+3s$; atunci însă $y=5-4s$. Pentru $s=0$, obținem $x_1=1$ și $y_1=5$, iar pentru $s=1$ rezultatul este $x_2=4$ și $y_2=1$.

Rezolvați prin oricare dintre metodele indicate, ecuațiile nedeterminate:

1) $617x-125y=91$, 2) $12x+31y=170$.

Orice număr irațional α poate fi de asemenea dezvoltat în fracție continuă. Izolînd din α partea întreagă, obținem

$$\alpha=q_0+\frac{1}{\alpha_1}\quad(q_0=[\alpha],\ \frac{1}{\alpha_1}<1,\ \alpha_1>1),$$

apoi

$$\alpha_1=q_1+\frac{1}{\alpha_2}\quad(q_1=[\alpha_1],\ \alpha_2>1),$$

$$\alpha_2=q_2+\frac{1}{\alpha_3}\quad(q_2=[\alpha_2],\ \alpha_3>1)\ \text{etc.}$$

După ce repetăm de n ori această operație, obținem $\alpha=[q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, \alpha_n]$; deoarece α_n este irațional pentru orice n, procesul nu se va sfîrși niciodată și vom ajunge la ceea ce se cheamă *o fracție continuă infinită:*

$$\alpha=[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n, \ldots].$$

Dacă α este un număr „irațional pătratic", adică $\alpha=\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$, unde a, b, c, d sînt numere întregi, atunci, începînd de la un anumit

rang încolo, cîturile parțiale se vor repeta periodic. De exemplu,

$$\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)=1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}}=$$

$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}.$$

Deoarece $\alpha=\sqrt{3}-1=\alpha_1$, mai departe cîturile parțiale se repetă periodic.

În definitiv, vom avea $\sqrt{3}=[1, 1, 2, 1, 2, 1, 2,...]$.

Să se arate în mod analog că $\sqrt{5}=[2, 4, 4, ...]$ și $\sqrt{7}=[2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, ...]$. Aceste proprietăți ale reduselor rămîn valabile și pentru fracțiile continue infinite; de aceea, cunoscînd destul de multe cîturi parțiale putem găsi ușor numerele raționale oricît de apropiate de α.

În adevăr, pe baza proprietății 2, α este cuprins între o pereche oarecare de reduse vecine $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ și $\frac{P_k}{Q_k}$. Dar valoarea absolută a diferenței lor este $\frac{1}{Q_{k-1}Q_k}$ (proprietatea 3). Prin urmare, eroarea egalității aproximative $\alpha\approx\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ este mai mică decît $\frac{1}{Q_{k-1}Q_k}$. De exemplu, pentru $\sqrt{5}=[2, 4, 4, 4, ...]$ avem:

k	0	1	2	3	4...
q_k	2	4	4	4	4...
P_k	2	9	38	161	682...
Q_k	1	4	17	72	305...

Prin urmare $\sqrt{5}\approx\frac{38}{17}$ (eroarea este $<\frac{1}{17\cdot 72}$), $\sqrt{5}\approx\frac{161}{72}$ (eroarea este $<\frac{1}{72\cdot 305}$) etc.

Să se afle ([19]) redusele pentru $\sqrt{2}=[1, 2, 2, \ldots]$ și pentru $\sqrt{3}=[1, 1, 2, 1, 2, \ldots]$, care să difere de $\sqrt{2}$, respectiv de $\sqrt{3}$ cu mai puțin de 10^{-6}.

Dezvoltarea lui $\sqrt{m}$ în fracție continuă ne oferă un procedeu simplu pentru rezolvarea în numere întregi a așa-numitei ecuații a lui Pell:

$$x^2 - my^2 = 1.$$

Fie $\sqrt{m}=[q_0, \underline{q_1, q_2, \ldots, q_{s-1}, q_s}, q_1, q_2, \ldots]$ (am subliniat perioada fracției continue).

Se constată că pentru s par soluțiile ecuației (8) vor fi perechile de numere de (P_{s-1}, Q_{s-1}), (P_{2s-1}, Q_{2s-1}), (P_{3s-1}, Q_{3s-1}) etc., iar pentru s impar, perechile de numere (P_{2s-1}, Q_{2s-1}), (P_{4s-1}, Q_{4s-1}), (P_{6s-1}, Q_{6s-1}) etc.

Pentru $\sqrt{10}=[3, 6, 6, 6 \ldots]$, avem

k	0	1	2	3 ...
q_k	3	6	6	6 ...
P_k	3	19	117	721 ...
Q_k	1	6	37	228 ...

Deoarece $s=1$, soluțiile ecuației $x^2 - 10y^2 = 1$ vor fi perechile de numere $x_1=P_1=19$ și $y_1=Q_1=6$; $x_2=P_3=721$ și $y_2=Q_3=223$ etc.

Pentru $\sqrt{32}=[5, 1, 1, 1, 10, 1, 1, \ldots]$, avem

k	0	1	2	3	4	5	6	7
q_k	5	1	1	1	10	1	1	1
P_k	5	6	11	17	181	198	379	577
Q_k	1	1	2	3	32	35	67	102

Deoarece $s=4$, soluțiile ecuației $x^2-32y^2=1$ vor fi perechile de numere $x_1=P_3=17$ și $y_1=Q_3=3$; $x_2=P_7=577$ și $y_2=Q_7=102$ etc.

Știind că $\sqrt{89}=[9, \overline{2, 3, 3, 18, 2, 3, \ldots}]$ și $\sqrt{61}=[7, \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14,} \overline{1, 4, 3,\ldots}]$, să se arate că cele mai mici soluții întregi ale ecuațiilor $x^2-89y^2=1$ și $x^2-61y^2=1$, vor fi respectiv perechile de numere (500 001, 53 000) și (1 766 319 049, 226 153 900).

Soluția cea mai mică a ecuației $x^2-991y^2=1$ este dată într-un articol al matematicianului polonez Siarpinscki:

$$x_1=379\,516\,400\,906\,811\,930\,638\,014\,896\,080 \text{ și}$$
$$y_1=12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767.$$

Aceasta înseamnă că $\sqrt{991y^2+1}$ va fi un număr irațional pentru orice valoare întreagă a lui y care nu depășește numărul y_1 și abia pentru $y=y_1$ vom obține numărul rațional x_1.

Pentru a ne da seama cît sînt de mari numerele x_1 și y_1 în acest din urmă exemplu, vom menționa că, dacă în curs de un miliard de miliarde (10^{18}) ani am calcula valorile lui $\sqrt{991y^2+1}$ pentru $y=1, 2, 3, 4,\ldots$ avînd nevoie de cîte o secundă pentru fiecare calcul, atunci nu am izbuti de fiecare dată să extragem rădăcina exactă.

Totuși nu am avea dreptul să susținem că $\sqrt{991y^2+1}$ va fi o expresie irațională pentru orice y natural; ar fi suficient, mărind „perioada de încercări" de aproximativ 400 de ori, „să ajungem" pînă la y_1 și am constata că $\sqrt{991y_1^2+1}$ este un număr rațional!

Să mai studiem o problemă atribuită lui Arhimede și care se reduce, în ultima analiză, la o ecuație de tipul (8).

Într-un manuscris descoperit la sfîrșitul secolului al XVIII-lea, se spune că Arhimede ar fi găsit o inscripție străveche și că ar fi trimis matematicienilor din Alexandria problema cuprinsă în ea.

În problemă se cere să se determine numărul de vite din cireada de vaci și de tauri care aparțin Soarelui. Din prima parte a enunțului problemei, care este dat în versuri rezultă că cireada era formată din tauri și vaci de culoare albă, neagră, roșcată și pestriță, precum și că numărul de tauri (U, X, Y, Z) și numărul de vaci (u, x, y, z) de aceste culori erau legate prin următoarele relații:

$$U=\frac{5}{6}X+Y;\quad X=\frac{9}{20}Z+Y;\quad Z=\frac{13}{42}U+Y;$$

$$u=\frac{7}{12}(X+x);\quad x=\frac{9}{20}(Z+z);\quad z=\frac{11}{30}(Y+y);$$

$$y=\frac{13}{42}(U+u).$$

Amatorii de calcule pot afla de aici că ([20])

$$U=10\,366\,482\,t, \qquad u=7\,206\,360\,t,$$
$$X=7\,460\,514\,t, \qquad x=4\,893\,246\,t,$$
$$Y=7\,358\,060\,t, \qquad y=3\,515\,820\,t,$$
$$Z=4\,149\,387\,t, \qquad z=5\,439\,213\,t,$$

(t ia valori întregi arbitrare).

Însă în partea a doua a textului problemei, adresîndu-se persoanei care urmează să rezolve problema, se menționează că principalele dificultăți sînt create de condițiile suplimentare:

„Dacă vei socoti cîte vite erau împreună,
Cîți tauri grași ce de-avalma păsteau, dolofani, pe cîmpii
Vaci cîte de lapte și cîte din fiecare culoare aparte,
Nimeni n-o spune că nu știi a calculelor mare știință.
Totuși, nici chiar înțelept tu nu vei putea a te crede
Dacă nu-i izbuti să ghicești cîteva obiceiuri ale vitelor..."

După enumerarea năravurilor taurilor, în partea de încheiere a textului problemei se spune:

„Dacă putea-vei găsi toate acestea și în minte
Turmei mărimea i-o ști-vei și altora poți a o spune,
Mergi înainte cu pași, voios de marea-ți izbîndă:
Cel mai de seamă din toți înțelepții atuncea tu fi-vei".

Dacă se ține seama de năravurile taurilor, atunci în formulele de mai sus t trebuie astfel ales încît:

1) suma $U+X$, egală cu 17 826 996 t, să fie un pătrat perfect; rezultă că trebuie să avem $t=4\,456\,749s^2$, unde s este un număr natural oarecare;

2) suma $Y+Z$, egală cu 11 507 447 t să fie un „număr triunghiular", adică un număr de forma $\frac{n(n+1)}{2}$.

Substituind pentru t expresia obținută mai sus, ajungem la ecuația $51\,285\,802\,909\,803s^2=\frac{n(n+1)}{2}$.

Dacă înmulțim ambii membri ai ecuației cu 8, adunăm apoi 1 la ambii membri și înlocuim, în sfîrșit, pe $2n+1$ prin w, obținem ecuația lui Pell:

$$w^2-410\,286\,423\,278\,424s^2=1.$$

Dacă vom nota acum cu N numărul de vite din întreaga cireadă (valoarea sa cea mai mică), ținînd seama de condițiile suplementare, vom constata (după calculele efectuate în 1880 de Amtor) că

$$N\approx 77.10^{206\,543}.$$

Nu prea ne vine să credem că cititorul va izbuti „în minte mărimea turmei" s-o știe!

§ 5. TRIPLETE DE NUMERE PITAGORICE ŞI HERONICE

Cunoscută relaţie dintre catetele şi ipotenuza unui triunghi dreptunghic $x^2+y^2=z^2$ poate fi considerată ca o ecuaţie nedeterminată cu trei necunoscute.

Se poate demonstra că diversele triplete posibile de numere întregi prime două cîte două, care satisfac această ecuaţie („tripletele de numere pitagorice"), se obţin pe baza formulelor

$$\begin{cases} x=u^2-v^2, \\ y=2uv, \\ z=u^2+v^2, \end{cases}$$

dacă vom da variabilelor auxiliare u şi v valori prime între ele şi de paritate diferită (în cazul nerespectării acestei condiţii, vom obţine triplete de numere pitagorice avînd cel mai mare divizor comun mai mare decît 1). De exemplu:

u	v	x	y	z
2	1	3	4	5
4	1	15	8	17
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
3	1	8	6	10

Tripletele de numere pitagorice sînt un caz particular al „tripletelor de numere heronice"; cum se numesc trei numere întregi care reprezintă lungimile laturilor unui triunghi avînd aria exprimată printr-un număr întreg.

Se demonstrează uşor ([21]) că oricare dintre înălţimile unui „triunghi heronic" (de exemplu, BD în fig. 3) determină două triunghiuri dreptunghice (ABD şi BCD) cu laturi raţionale adiacente sau suprapuse.

Luînd triunghiurile dreptunghice Δ şi Δ' cu laturile întregi a, b, c şi a', b', c' (c şi c' sînt ipotenuzele) şi înmulţind toate laturile ale lui Δ cu $\frac{a'}{a}$, obţinem triunghiul Δ_1 de laturi a', $\frac{ba'}{a}$, $\frac{ca'}{b}$, asemenea cu triunghiul Δ.

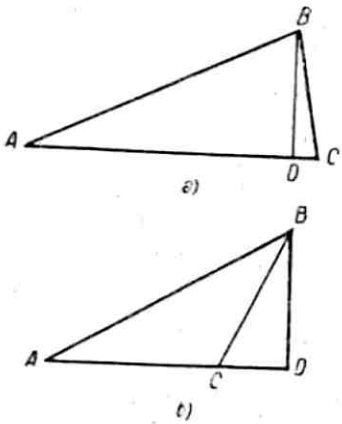


Fig. 3

Făcînd să coincidă catetele omologe ale triunghiurilor Δ_1 și Δ', putem obține două triunghiuri avînd laturile raționale $\frac{a'}{a}c$, c', $\left|\frac{a'}{a}b \pm b'\right|$ mărind aceste numere de a ori, obținem două triplete de numere heronice: $a'c$, ac'; $a'b \pm b'a$|.

În același mod, „egalînd" cateta a cu cateta b' (înmulțind laturile triunghiului Δ cu $\frac{b'}{a}$) sau „egalînd" cateta a cu cateta a' (înmulțind cu $\frac{a'}{b}$) sau „egalînd" b cu b' (înmulțind cu $\frac{b'}{b}$) putem obține încă șase triplete de numere heronice:

$a'c$, bc', $|a'a \pm b'b|$; $b'c$, ac', $|b'b \pm a'a|$; $b'c$, bc', $|b'a \pm a'b|$.

De exemplu, pentru tripletele pitagorice (3, 4, 5) și (15, 8, 17) se pot obține ușor, în modul arătat mai sus, 8 triplete de numere heronice: (75, 51, 84), (75, 51 36), (75, 68, 77), (75, 68, 13), (40, 51, 77), (40, 51, 13), (40, 68, 84), (40, 68, 36). Primele două triplete și ultimele două vor da, după ce le vom simplifica respectiv cu 3 și cu 4:

(25, 17, 28), (25, 17, 12), (10, 17, 21), (10, 17, 9).

Să se afle ([22]) tripletele de numere heronice, plecînd de la tripletele pitagorice:

1) (3, 4, 5) și (5, 12, 13),

2) (7, 24, 25) și (7, 24, 25).

§ 6. PROBLEME DISTRACTIVE DE ARITMETICĂ

Există probleme de aritmetică a căror rezolvare nu este legată de teorie, ci îi cere celui care se ocupă de ele numai inventivitate și răbdare.

Astfel de probleme sînt: căutarea unor relații interesante între numere, diverse curiozități numerice etc.

Să dăm cîteva exemple caracteristice:

1. Lăsînd neschimbată ordinea cifrelor 1 2 3 4 5 6 7 8 9, să se pună între ele semne ale operațiilor aritmetice și (la nevoie) paranteze, în așa fel încît să se obțină ca rezultat un număr N, stabilit dinainte. De exemplu, pentru

$N=\frac{1}{2}$ și pentru $N=1$ avem: $\frac{1}{2}=(123-45):(67+89)$;

$1=1+2-3+4-5-6+7-8+9$; $1=1+23-45-67+89$ etc.

Ne putem pune problema de a reprezenta în acest mod cît mai multe numere naturale sau fracții (de exemplu, fracțiile de forma $\frac{k}{5}$ unde $k = 1, 2, 3, \ldots$). Putem, dimpotrivă, să luăm un număr oarecare și să căutăm să-l reprezentăm în diferite feluri.

În problemă pot fi introduse restricții, permițîndu-se numai folosirea semnelor + și —, sau, dimpotrivă, se poate mări libertatea de acțiune, permițîndu-se folosirea radicalilor, schimbarea ordinii cifrelor (de exemplu, $100 = 67^2 - 4\,385 - 1 - \sqrt{9}$) etc.

2. Să se așeze cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 în schemele de mai jos, astfel ca, după efectuarea operațiilor indicate, să se obțină egalități adevărate:

a) — — · — — — = — — — — (de exemplu, $12 \cdot 483 = 5\,796$ etc.).

b) — — — · — — = — — · — —

c) — — — — · — = — — · — —

3. Să se așeze cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, în așa fel încît produsul a trei numere de cîte trei cifre — — — · — — — · — — — să fie cît mai mare (sau cît mai mic).

4. Să se așeze cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 în așa fel încît să aibă loc egalitatea — — — — — : — — — — = n, unde n este unul din numerele 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

5. Unele numere pot fi scrise altfel, fără a recurge la cifre noi; de exemplu: $660 = 6! - 60$; $1395 = 15 \cdot 93$; $145 = 1! + 4! + 5!$; $144 = (1+4)! + 4! = (1 + \sqrt{4})! \cdot 4!$; $387\,420\,489 = 3^{87+420-489}$.

Încercați să găsiți egalități analoge.

6. Folosind cîte o singură dată fiecare dintre cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6 și fiecare dintre operațiile adunare, scădere, înmulțire, împărțire, și ridicare la putere, să se obțină cel mai mare număr posibil.

7. În expresia $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9$ să se introducă paranteze în așa fel încît după efectuarea calculelor să se obțină cel mai mare (sau cel mai mic) dintre toate numerele posibile în cazul dat.

8. În exemplele: $41\,096 \cdot 83 = 3\,410\,968$ și $8 \cdot 86 = 688$, înmulțirea cu un număr de două cifre a fost „simplificată": cifra a doua a înmulțitorului se pune înaintea deînmulțitului, iar prima cifră după el.

Găsiți exemple analoge.

9. Într-un articol de revistă se arată că printre primele 10 000 numere există numai 8 numere care se scriu în două sisteme de numerație prin trei cifre identice.

Cel mai mic și cel mai mare dintre ele sînt:

$$273 = 111_{(16)} = 333_{(9)} \text{ și } 9114 = 222_{(67)} = \overline{14}\,\overline{14}\,\overline{14}_{(25)};$$

Încercați să le găsiți pe celelalte.

Puteți oare găsi numere : *a*) care se scriu prin trei cifre identice în trei sisteme de numerație ; *b*) care se scriu prin patru cifre identice în două sisteme de numerație ?

10. Putem recomanda iubitorilor de matematică să colecționeze curiozități numerice existente și să caute altele noi. Vom da cîteva exemple care pot sugera teme pentru cercetări independente.

a) $\overline{10}\,\overline{10}44_{(13)} = \overline{111}^2{}_{(13)}$; $44\overline{1010}_{(13)} = 77^2{}_{(13)}$;

b) $7778^2 - 2223^2 = 55\,555\,555$;

c) $888\,889^2 - 111\,112^2 = 777\,777\,777\,777$;

d) $999\,999\,999^2 = 12\,345\,678\,987\,654\,321 \cdot (1+2+3+4+5+$ $+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1)$.

Cum ne putem convinge cel mai ușor de valabilitatea ultimelor trei egalități ? ([23])

11. Simplificări amuzante. Există fracții a căror valoare nu se schimbă dacă suprimăm cifrele identice și chiar grupuri de cifre identice la numărător și la numitor. De exemplu : $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$; $\frac{3\,544}{7\,531} = \frac{344}{731}$; $\frac{2\,666}{6665} = \frac{266}{665} = \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$; $\frac{143\,185}{17\,018\,560} = \frac{1\,435}{170\,560}$; $\frac{4\,251\,935\,345}{91\,819\,355\,185} = \frac{425\,345}{91\,825\,185}$ etc.

Se poate pune problema de a afla toate fracțiile care admit o astfel de „simplificare", dacă stabilim din cîte numere trebuie să fie formate numărătorul și numitorul și în ce locuri trebuie să fie cifrele „simplificate". De exemplu, din $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$ $(a \neq c)$ se obține ușor $c = \frac{10ab}{9a+b}$; dacă luăm numerele pînă la 10, obținem valori întregi pentru b și c numai pentru $a = 1, 2, 4$, ceea ce ne dă fracțiile $\frac{16}{64}$, $\frac{19}{95}$, $\frac{26}{64}$, $\frac{49}{98}$.

12. Folosind patru cifre de 4 (în alte variante, cinci cifre de 5, patru cifre de 5 etc.), să se scrie orice număr întreg cuprins între 1 și n, unde n este un număr natural cît se poate de mare. De exemplu, $1 = 4 - 4 + \frac{4}{4}$; $7 = \frac{44}{4} - 4$ etc.

Putem conveni să folosim semnul de factorial $\left(21 = 4! + \frac{4}{4} - \right.$ $\left. - 4\right)$, semnul de extragere a radicalului $\left(17 = \sqrt{4^4} + \frac{4}{4}\right)$, să intro-

ducem „un punct înaintea unui număr" la nivelul rîndului și „un punct deasupra numărului" pentru reprezentarea fracțiilor zecimale și a fracțiilor zecimale periodice ($0{,}4 = \cdot 4$; $0{,}(4) = \cdot\dot{4}$) ; de exemplu :

$$19 = \frac{4}{\cdot 4} + \frac{4}{\cdot\dot{4}} \text{ etc.}$$

Dacă admitem și folosirea simbolului log, atunci, după cum reiese din formula :

$$n = \log_4\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{4}}}}}}_{2n \text{ radicali}}\right)$$

orice număr natural n poate fi scris cu ajutorul a trei cifre de 4.

§ 7. SCAMATORII CU NUMERE

Întîlnim citeodată oameni care efectuează în minte, cu o viteză neobișnuită, operații cu numere de multe cifre. Acești artiști calculatori, care folosesc unele artificii cu numere, uimesc publicul prin rezultate impresionante.

Desigur, nu toți cei ce cunosc secretul unui anumit „număr" obținut de ei, pot să-l aplice cu succes. Cunoașterea secretului lor este de folos numai în cazurile cele mai simple.

Vom descrie cîteva scamatorii simple cu numere.

Ghicirea unui număr

Dacă-i cerem cuiva să se gîndească la un număr și să efectueze cu el anumite operații, este ușor, într-o serie de cazuri, să ghicim numărul la care s-a gîndit, orientîndu-ne după rezultatul calculelor. Dăm cîteva exemple :

1. Cereți cuiva să se gîndească la un număr, să adune la el 3, să înmulțească suma obținută cu 6, să scadă de aici numărul la care s-a gîndit, să mai scadă apoi 8 și, în sfîrșit, să împartă rezultatul prin 5. Cînd vi se va comunica rezultatul, veți putea spune imediat numărul la care s-a gîndit. După cum rezultă din egalitatea $[(x+3)\cdot 6 - x - 8] : 5 = x+2$, va fi suficient să scădeți din rezultat numărul 2.

2. Cereți cuiva să se gîndească la două numere x și y nu mai mari decît 100 (data, vîrsta unui om, numărul încălțămintei, restul de la 100 etc.) și să efectueze cu ele șirul de operații dat de membrul întîi al egalității :

$$(2 \cdot x+5) \cdot 50+y-365=100\ x+y-115=N.$$

Atunci, cunoscîndu-l pe N, veți putea determina pe x și pe y (adunînd 115 la N și despărțind numărul obținut în două numere, prin separarea ultimelor două cifre).

3. Cereți cuiva să se gîndească la ziua (b), luna (m) și anul (n) unui eveniment care a avut loc în secolul al XX-lea (luînd numai ultimele două cifre ale anului) și să se efectueze cu l, m și n operațiile indicate în membrul întîi al egalității

$$[(20\,l+222) \cdot 5+m]\ 100+n+111=10\,000\,l+100\ m+ +n+111\,111=N.$$

Pentru a ghici data, trebuie să scădeți din N numărul 111 111, iar diferența obținută s-o despărțiți în grupe, separînd de la dreapta la stînga cîte două cifre. De exemplu, dacă $N=201\,656$, atunci numărul care trebuia ghicit este $9 \cdot 05 \cdot 45$, adică 9 mai 1945. Astfel de „artificii" pot fi imaginate oricît de multe.

Ghicirea rezultatelor unor operații efectuate cu un număr necunoscut

Există o serie de artificii bazate pe faptul că anumite operații conduc la rezultate identice pentru o clasă de numere destul de mare. Uneori aceasta se datorește eliminării numărului care trebuie ghicit în procesul efectuării operațiilor, alteori unei particularități a clasei de numere, iar în alte cazuri datorită unei particularități a operațiilor efectuate. Iată cîteva exemple tipice :

1. Dacă în dreapta unui număr arbitrar N de trei cifre mai scriem același număr și împărțim numărul de șase cifre astfel obținut (el va fi egal cu $1\,001 \cdot N=N \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$) prin 7, iar apoi cîtul obținut prin N și, în sfîrșit, al doilea cît prin 11, rezultatul va fi întotdeauna 13.

Cei mai mulți oameni sînt uimiți că toate împărțirile se fac fără rest, oricare ar fi numărul N ales.

2. Dat fiind că orice număr prim impar p, diferit de 3, poate fi scris sub forma $6\ k \pm 1$, rezultă că $p^2+17=36\ k^2 \pm 12\ k+18$, adică p^2+17 va da întotdeauna restul 6 la împărțirea prin 12.

3. Dacă în numărul de trei cifre $\overline{abc}$ (a,b,c) sînt cifrele numărului) avem $a>c$, atunci

1) în diferența $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{\alpha\beta\gamma}$ avem totdeauna $\beta=9=\alpha+\gamma$.

2) $\overline{\alpha\beta\gamma}+\overline{\gamma\beta\alpha}=1089$.

Așadar, cunoscînd numai una dintre cifrele extreme ale numărului $\overline{\alpha\beta\gamma}$, putem spune imediat diferența dintre numărul abc și numărul răsturnat și, fără a ști nimic despre numărul $\overline{\alpha\beta\gamma}$, putem „ghici" rezultatul adunării $\overline{\alpha\beta\gamma} + \overline{\gamma\beta\alpha}$, oricare ar fi numărul inițial.

Ghicirea unui număr cu ajutorul a trei tabele

Scriind pe trei tabele numerele de la 1 pînă la 60 pe rînd, astfel încît să avem în prima tabelă trei coloane de cîte 20 de numere, în a doua patru coloane de cîte 15 numere și în a treia cinci coloane de

I	II	III
1	2	3
4	5	6
7	8	9
⋮	⋮	⋮
55	56	57
58	59	60

I	II	III	IV
1	2	3	4
5	6	7	8
⋮	⋮	⋮	⋮
53	54	55	56
57	58	59	60

I	II	III	IV	V
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
51	52	53	54	55
56	57	58	59	60

Fig. 4

cîte 12 numere (vezi fig. 4), este ușor să ghicim repede un număr N ($N \leqslant 60$), dacă ni se indică numerele de ordine α, β, γ ale coloanelor care conțin numărul de ghicit în cele trei tabele : N va fi egal cu restul împărțirii prin 60 a numărului $40\alpha + 45\beta + 36\gamma$; cu alte cuvinte, N va fi egal cu cel mai mic număr pozitiv congruent cu suma $(40\alpha + 45\beta + 36\gamma)$ de modul 60. De exemplu, pentru $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, avem :

$$40\alpha + 45\beta + 36\gamma \equiv 0 + 30 + 36 \equiv 6 (\text{mod. } 60), \text{ adică } N = 6 ([24]).$$

Analog se poate rezolva problema pentru numere pînă la 420, dispuse în patru tabele cu 3, 4, 5 și 7 coloane ; dacă α, β, γ, δ sînt numerele de ordine ale coloanelor în care figurează numărul de ghicit, acesta este egal cu restul împărțirii prin 420 a numărului

$$280\alpha + 105\beta + 330\gamma + 120\delta.$$

Încercați să demonstrați aceasta, continuînd întrucîtva raționamentele de la § 38 (vezi nota ([24])).

Un artificiu cu cărți de joc

După ce cerem cuiva să scoată o carte dintr-un pachet de 36 de cărți de joc, putem, examinînd repede, una după alta (fără a lăsa pachetul din mînă) cărțile rămase, să o stabilim pe cea care a fost scoasă. Nu trebuie nici măcar să încercăm de a ține minte ce cărți au rămas în pachet ; este suficient să găsim doar suma S a punctelor rămase, ceea ce se face foarte repede după o oarecare deprindere, mai ales că, socotind asul egal cu 1, pentru a simplifica adunarea, vom avea pentru S : $190 \leqslant S < 200$, deci, în cadrul calculului este suficient să căutăm doar numărul de unități a lui S (neglijînd zecile).

Dacă acest număr este m, să zicem, egal cu 3, atunci $S = 193$, adică din pachet a fost scos un 7 a cărui culoare se determină ușor parcurgînd din nou la repezeală tot pachetul.

Cine a luat și cît ?

Un ghicitor împarte la trei persoane A, B și C respectiv o monedă, două și trei, lăsînd pe masă alte 18 monede. În lipsa „ghicitorului", A, B și C își împart trei obiecte : o furculiță, o lingură și un cuțit, după care posesorul furculiței mai ia tot atîtea monede cîte primise la început, iar posesorii lingurii și cuțitului mai capătă respectiv de două ori și de patru ori mai multe monede (decît li se dăduseră înainte).

Date fiind cele șase repartiții posibile ale obiectelor între A, B și C, anume : f, l, c ; l, f, c ; f, c, l ; l, c, f ; c, f, l ; c, l, f, vor mai rămîne pe masă respectiv 1, 2, 3, 5, 6, 7 obiecte.

Dacă veți imagina un procedeu simplu pentru a ține minte variantele de repartiție ale obiectelor între cele trei persoane, în ordinea în care sînt notate mai sus, veți putea să ghiciți, după numărul monedelor rămase, cine anume a luat fiecare obiect.

Pentru a stabili în mod analog — după monedele rămase — pe deținătorii a n obiecte diferite, trebuie să alegem n numere distincte : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (pentru repartiția inițială a monedelor) și n factori $m_1, m_2, \ldots, m_n$, astfel încît pentru diversele moduri de a repartiza acești factori între numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ să obținem $n!$ sume de forma :

$$m_{\alpha_1} a_1 + m_{\alpha_2} a_2 + \cdots + m_{\alpha_n} a_n$$

distincte, dar diferind cît mai puțin posibil una de alta (aici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ reprezintă numerele obiectelor luate respectiv de prima, a doua, ..., a n—a persoană). Pentru $n = 4$, putem lua, de exemplu, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, iar ca factori m_i : 1, 2, 5, 15.

Extragerea rădăcinii dintr-un număr cu multe cifre

Folosind o serie de procedee simple, învățăm cu ușurință să extragem în minte rădăcina de ordin impar, a unui număr de mai multe cifre, care este o putere a unui număr de două sau chiar de trei cifre.

Cînd calculăm $\sqrt[s]{N}$, numărul N trebuie despărțit, înaintînd de la dreapta spre stînga în grupe de cîte s cifre (bineînțeles, ultima grupă din stînga poate conține și mai puține cifre).

Ultima cifră a rădăcinii se determină ușor, folosind următoarele două reguli :

1) la numerele de forma n^5, n^9, n^{13}, ..., n^{4s+1} ultima cifră este întotdeauna aceeași ca și la n ;

2) dacă ultima cifră a lui n este 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, atunci n^3, n^7, n^{11}, ..., n^{4s-1} vor avea respectiv ca ultimă cifră, 0, 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9.

Prima cifră a rădăcinii $\sqrt[s]{N}$ se obține ușor pentru $s=3$, dacă sînt cunoscute valorile lui n^3, pentru $1 \leqslant n \leqslant 9$, iar pentru $s=5$, 7, 9 etc. trebuie să ținem minte tabela logaritmilor cu două zecimale ai primelor nouă numere :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
lg n	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95

Exemple : 1) Putem scrie direct că $\sqrt[3]{314\,432}=68$, aplicînd regula II și observînd că $6^3 < 314 < 7^3$.

2) $\sqrt[7]{N}=\sqrt[7]{17\,565\,568\,854\,912}=n$. Deoarece $10^{13}<N<2\cdot 10^{13}$, avem $13{,}0 <\lg N<13{,}3$, deci $1{,}85<\lg n=\frac{1}{7}\lg N < 1{,}9$, prin urmare, în conformitate cu tabela de mai sus avem $70<n<80$; aplicînd regula II, obținem $n=78$.

3) Rădăcina de ordinul 25 al unui număr cu 46 de cifre care se termină cu 8 este 68 ($45<\lg N<46$, prin urmare, $1{,}8<\lg n=\frac{1}{25}\lg N < 1{,}84$).

Dacă N are ca ultimă cifră 1, 3, 7, 9, atunci, cunoscînd numai ultimele două cifre ale numărului N, putem afla și ultimele două cifre ale lui $\sqrt[3]{N}$. De exemplu, $\sqrt[3]{\ldots 53}=n=10z+7$. Calculăm în minte $(7+10z)^3=343+147\cdot z\ 10+$ ... (ultimii doi termeni nu influențează cifra unităților și a zecilor).

Dat fiind că numărul zecilor din N este egal cu 5 iar în 343 cu 4, înseamnă că numărul $147z$ se termină cu cifra 1 iar z cu cifra 3, adică $n=100y+37$.

Această metodă le permite uneori artiştilor calculatori ca, cerînd spectatorilor să le dicteze încet, de la dreapta spre stînga, cifrele numărului N, să dea răspunsul (pentru $N<10^6$) fără a mai aştepta să li se dicteze numărul pînă la capăt.

Ţinînd seama de unele fapte secundare, acest procedeu poate fi folosit şi atunci cînd ultima cifră a lui N este diferită de 1, 3, 7, 9 ; el poate fi aplicat şi pentru $s=5$, 7 etc.

Vom mai da aici încă un procedeu care permite aflarea uneia dintre cifrele numărului $n=\sqrt[3]{N}$, dacă celelalte cifre ale lui n sînt cunoscute.

Metoda se bazează pe următoarea regulă ([25]) :

Dacă n^3 dă la împărţirea prin 11
restul d : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
atunci n dă la împărţirea prin 11
restul d_1 : 0, 1, 7, 9, 5, 3, 8, 6, 2, 4, 10.

După cum se ştie din § 3, $N\equiv\sigma'(N) \pmod{11}$, unde $\sigma'(N)$ este „suma algebrică a cifrelor" numărului N. De aceea trebuie să aflăm pe $\sigma'(N)$ şi să-l determinăm pe d, care este congruent modulo 11 $(0\leqslant d\leqslant 10)$ cu $\sigma'(N)$.

Dacă ţinem minte corespondenţa dintre d şi d_1 (şi artiştii calculatori sînt nevoiţi să ţină minte multe !), atunci cunoscînd pe d_1 nu ne mai rămîne decît să aflăm singura cifră necunoscută a numărului căutat n, din condiţia $d_1\equiv\sigma'(n) \pmod{11}$. Exemplu: $\sqrt[3]{54\,053\,028\,541}=3z81=n$ (cum se determină toate cifrele, în afară de z, s-a arătat mai sus).

Dat fiind că $\sigma'(N)=1-4+5-8+2-0+3-5+0-4+5=-5$ şi $-5\equiv 6 \pmod{11}$, obţinem $d=6$; prin urmare, $\sigma'(n)=1-8+z-3=z-10$ trebuie să fie congruent modulo 11 cu $d_1=8$, de unde rezultă $z=7$.

Desigur, toate aceste calcule le poate face repede în minte numai un om cu reale aptitudini pentru calcul şi care a făcut un antrenament special.

§ 8. CALCULUL RAPID

Tendinţa de a simplifica operaţiile cu numere de mai multe cifre a condus, la începutul secolului al XVII-lea, la inventarea tabelelor de logaritmi, iar mai tîrziu, a riglei de calcul.

În secolul al XIX-lea au început să devină uzuale aritmometrele, iar la începutul secolului al XX-lea, maşinile de calcul automate ; în

urmă cu 15 ani, au apărut mașinile de calculat electronice, care permit să se rezolve în cîteva ore probleme care necesită efectuarea a milioane de operații cu numere de multe cifre.

În paragraful de față prezentăm mijloace considerabil mai modeste, accesibile oricui, care ușurează și accelerează calculele.

Înmulțirea prescurtată

Dacă avem de înmulțit, să zicem, numerele 7 496 și 3 852, scriem în întregime, în ordinea corespunzătoare, produsul fiecărei cifre a deînmulțitului cu fiecare cifră a înmulțitorului.

				× 7	4	9	6
				× 3	8	5	2
	0	0	0	14	8	18	12
	0	0	35	20	45	30	
	0	56	32	72	48		
	21	12	27	18			
2	8	8	7	4	5	9	2
	$\widehat{7}$	$\widehat{10}$	$\widehat{13}$	$\widehat{10}$	$\widehat{4}$	$\widehat{1}$	

În coloanele verticale cuprinse între liniile orizontale figurează (socotind de sus în jos) :

1) produsul dintre cifra unităților înmulțitorului și cifra corespunzătoare (α) a deînmulțitului ; 2) produsele celorlalte cifre ale deînmulțitorului, luate de la dreapta spre stînga și cifrele situate în dreapta cifrei α a deînmulțitului, luate de la stînga spre dreapta.

De exemplu, în ordinul sutelor avem :

$$8(=2\times4),\qquad 45(=5\times9),\qquad 48(=8\times6)\ ;$$

aici $\alpha=4$. În ordinul zecilor de mii avem :

$$0(=2\times0)\ ;\qquad 35(=5\times7),\qquad 32(=8\times4)\qquad 27(=3\times9);$$

aici $\alpha=0$.

Adunînd apoi numerele din fiecare coloană și adăugînd la ele „zecile" ținute în minte și obținute la adunarea numerelor din ordinul imediat vecin în dreapta (vezi numerele marcate cu arce), căpătăm, mergînd de la dreapta spre stînga, toate cifrele produsului căutat.

Numerele care figurează în liniile reunite prin acoladă nu trebuie neapărat scrise ; adunarea respectivelor numere de cîte două cifre se pot face și în gînd, în care scop, bineînțeles, trebuie să învățăm să adunăm repede și fără greșeală numere de cîte două cifre.

De exemplu, dacă am ajuns la ordinul sutelor (de la ordinul zecilor ne-a rămas „4 în gînd"), atunci spunem (privind spre 2 și 4, apoi spre 5 și 9, în sfîrșit spre 8 și 6) „opt și cu patru fac doispre-

zece ; și cu patruzeci și cinci fac cincizeci și șapte ; și cu patruzeci și opt fac o sută cinci, zece în gînd" (iar cifra 5 o scriem în ordinul sutelor).

Încercați să vă exersați întîi cu numere de două cifre, apoi de trei etc. și veți vedea că, după un antrenament oarecare, veți putea afla repede și fără greșeală produsul unor numere de mai multe cifre.

Împărțirea prescurtată

Cu împărțirea unor numere de mai multe cifre ne putem deprinde ușor, înmulțind împărțitorul rînd pe rînd cu fiecare cifră a cîtului, să scădem direct produsul obținut (fără a-l mai scrie) din numărul N, format din cîteva cifre de la începutul deîmpărțitului sau de vreun rest parțial. Cifrele diferenței căutate se determină (de la dreapta spre stînga) în așa fel încît diferența adunată cu produsul respectiv să dea numărul N.

De exemplu : $\begin{array}{r|l} 496\,343 & 927 \\ 328 & 5 \end{array}$. Aici cifrele diferenței, adică 8, 2, 3, au fost obținute astfel : socotind în gînd că $5 \cdot 7 = 35$ și că trebuie să adăugăm 8 pentru a obține un număr care se termină cu cifra 3, spunem : treizeci și cinci și cu *opt* fac patruzeci și trei, patru ținem minte (iar în diferență scriem cifra 8) ; patru și cu zece ($5 \cdot 2$) fac paisprezece și cu *doi* fac șaisprezece, unu ținem minte (iar în diferență scriem cifra 2) ; unu și cu patruzeci și cinci ($5 \cdot 9$) fac patruzeci și șase și cu *trei* fac patruzeci și nouă" (scriem în diferența căutată cifra 3).

a) Fig. 5 *b)*

Calculatorul cu bile și bețișoarele lui Neper

Înmulțirea și împărțirea numerelor de mai multe cifre se simplifică mult dacă folosim calculatorul cu bile și așa-numitele bețișoare ale lui Neper.

Fiecare dintre bețișoarele lui Neper dă produsul dintre cifra care figurează în „titlu" și 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (vezi fig. 5, *a*) ; numărul zecilor este scris deasupra liniei oblice din căsuța respectivă, iar numărul unităților, de desubtul ei.

Dacă aşezăm alături mai multe beţişoare, astfel ca titlurile lor să formeze deînmulţitul şi aşezînd alături, în stînga, un beţişor auxiliar care indică numărul de ordine al liniilor, putem citi uşor, în mod direct, produsele deînmulţitului care figurează în titlu cu numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

De exemplu (vezi fig. 5, *a*)

$$3\,987\times 8=\left|\begin{array}{c|c|c|c}{}^{2}/_{4} & {}^{7}/_{2} & {}^{6}/_{4} & {}^{5}/_{6}\end{array}\right|=31\,896$$

(cifra zecilor, scrisă deasupra liniei oblice, se adaugă la cifra unităţilor din celula stîngă vecină).

În cazul înmulţirii unor numere de mai multe cifre, produsele dintre deînmulţit şi diversele cifre ale înmulţitorului, obţinute cu ajutorul beţişoarelor lui Neper, se recomandă să fie înregistrate direct (în ordinul corespunzător) pe calculatorul cu bile.

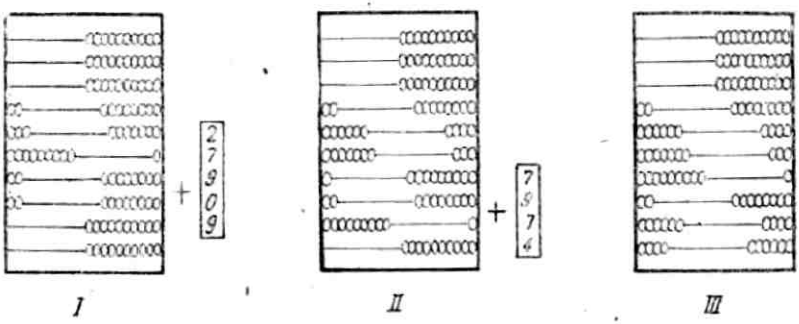


Fig. 6

În fig. 6 sînt reprezentate diversele etape ale înmulţirii numărului 3 987 cu 672.

I — pe calculatorul cu bile figurează 23 922 sute (3987×6);

II — la acest număr s-au adăugat 27 909 zeci (3 987×7);

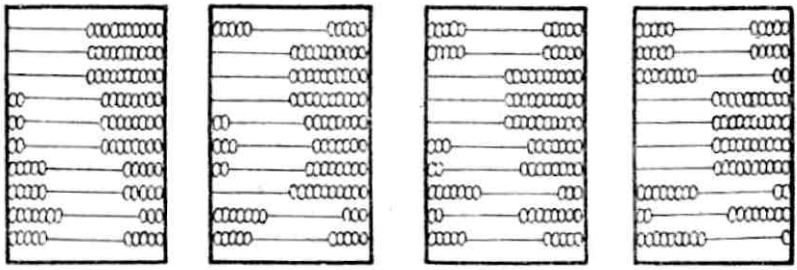
III — la numărul obţinut s-au adăugat 7 974 unităţi (3 907×2).

Cînd avem de împărţit, bunăoară, numărul 2 225 575 prin 3 987, trebuie:

1) să fixăm pe calculatorul cu bile deîmpărţitul (fig. 7, *a*);

2) să găsim pe beţişoarele lui Neper numărul cel mai apropiat de 22 255 însă mai mic sau egal (acesta va fi 19 935=3 987×5) şi să-l

scădem din numărul 22 255 ; în același timp, trebuie să separăm pe rîndul de sus al calculatorului cu bile prima cifră a cîtului (5) (fig. 7, *b*) ;



a) *b)* *c)* *d)*

Fig. 7

3) să găsim pe beţişoarele lui Neper numărul cel mai apropiat de 23 207, însă mai mic sau egal (acesta va fi $19\,935 = 3\,987 \times 5$) şi să-l scădem din 23 207, iar pe al doilea rînd de sus să fixăm a doua cifră a cîtului (5) (fig. 7, c) ;

4) să găsim pe beţişoarele lui Neper numărul cel mai apropiat de 32 725, însă mai mic (acesta va fi $31\,896 = 3\,987 \times 8$) şi să-l scădem din 32 725, iar pe rîndul al treilea de sus să trecem a treia cifră a cîtului (8).

Ca rezultat obţinem : pe rîndurile de sus cîtul căutat (558), iar pe cele de jos, restul (829) (fig. 7, d).

Confecţionaţi — din carton gros sau dintr-un placaj beţişoarele lui Neper şi exersaţi-vă în înmulţirea şi în împărţirea numerelor de mai multe cifre folosind calculatorul cu bile. Veţi constata cît de mult pot uşura aceste dispozitive simple munca unui calculator.

Trebuie confecţionate două sau trei garnituri de beţişoare, deoarece deînmulţitul poate conţine cifre identice ; nu uitaţi beţişoarele cu titlul „0" !

Beţişoarele lui Neper pot fi folosite şi atunci cînd calculăm şi în alte sisteme de numeraţie. În fig. 5, *b* este reprezentat un beţişor pentru înmulţirea lui 7 cu numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 în sistemul de numeraţie cu baza 12 ($\alpha = 10$; $\beta = 11$).

Extragerea rădăcinii pătrate

Se ştie că suma primelor n numere impare consecutive (începînd cu 1) este egală cu n^2 : $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2$.

De aceea, calculul lui $\sqrt{N}$ (N este un număr natural) se poate reduce la următoarea problemă : să se afle suma celui mai mare

număr de termeni de forma 1, 3, 5, 7, 9, 11... care să nu fie mai mare decît numărul N. Această problemă se rezolvă ușor cu ajutorul calculatorului cu bile.

Pentru valori mari ale lui N, această operație ar fi obositoare, astfel că este mai bine să separăm numărul N în grupe și să calculăm apoi rînd pe rînd (de la stînga spre dreapta) cifrele rădăcinii căutate.

Dacă N are trei sau patru cifre, scriem :

$$\sqrt{N}=10a+b. \qquad (1)$$

în loc să scădem din N succesiv, $10a$ termeni ai sumei :

$$S=1+3+5+\ldots+(20a-3)+(20a-1)=(10a)^2$$

iar apoi b termeni ai sumei :

$$S'=(20a+1)+(20a+3)+\ldots+(20a+2b-1),$$

este mai simplu să scădem din „grupa superioară" a numărului N numai a termeni : $1+3+5\ \ldots\ +(2a-1)=a^2$ (ceea ce este echivalent cu a scădea din N numărul $a^2\cdot 100=S$), iar apoi din numărul rămas să scădem termenii sumei S' (unde primul termen este cu 1 mai mare decît produsul dintre a și 20).

În fig. 8 este reprezentată desfășurarea calculului lui $\sqrt{1\,369}$ cu ajutorul calculatorului cu bile.

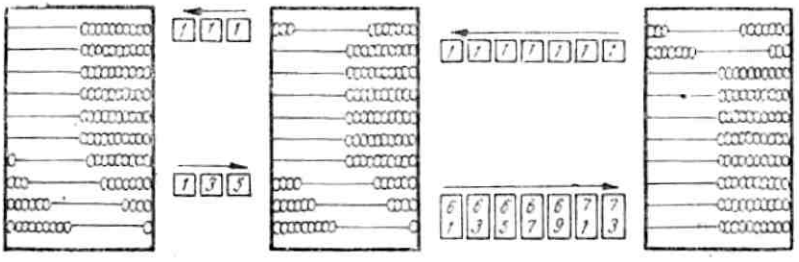


Fig. 8

După ce scădem din prima grupă (13) numerele 1, 3, 5, despărțim pe rîndul de sus cîte o singură bilă la efectuarea fiecărei scăderi.

Scăzînd apoi din rest (469) rînd pe rînd numerele 61, 63, 65, 67 ... ($61=3\cdot 20+1$) și separînd la fiecare efectuare a unei scăderi cîte o bilă pe rîndul al doilea de sus, obținem $\sqrt{1\,369}=37$.

Pentru accelerarea procesului, anumite cifre ale rădăcinii căutate pot fi determinate „în gînd", scăzînd apoi direct din restul corespunzător suma mai multor termeni de forma menționată.

De exemplu, socotind în gînd că la extragerea rădăcinii din 1 369 cifra a doua va fi un 7, în loc să scădem din restul (469) numerele 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, putem scădea direct $7 \cdot 60 + (1+3+5+7+9+11+13) = 7 \cdot 60 + 7^2 = 67 \cdot 7$ și să separăm 7 bile pe rîndul al doilea de sus.

Este adevărat că, în aceste condiții, se pierde „automatismul" în efectuarea operațiilor și tot procesul va fi o copie fidelă a procedeului obișnuit de extragere a rădăcinii pătrate.

Dacă N este un număr de cinci sau de șase cifre, atunci a din soluția (1) va fi un număr de două cifre. Pentru obținerea lui trebuie să extragem rădăcina primelor două „grupe superioare" ale numărului N, iar apoi să-l aflăm pe b, cum s-a arătat mai sus.

De exemplu, pentru a calcula $\sqrt{86\,436}$ scădem din 8 numerele 1, 3 și obținem 46 436 ; apoi din 464 scădem numerile 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, $(41 = 2 \times 20 + 1)$ și, în sfîrșit, din restul obținut (2 336) scădem numerele 581, 583, 585, 587, $(581 = 2 \times 290 + 1)$. Pe rîndurile de sus vom obține $\sqrt{86\,436} = 294$.

Vom descrie acum încă un procedeu pentru extragerea rădăcinii pătrate, care ne permite să obținem direct un număr rațional care diferă foarte puțin de rădăcina căutată.
Fie

$$\sqrt{A} = a + \alpha \approx a, \tag{2}$$

unde a este valoarea aproximativă a rădăcinii căutate, iar α eroarea aproximației, fiind cunoscut că $|\alpha| < \gamma$ și γ poate fi egal cu $\frac{1}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{1}{100}$ etc.

Din (2) avem $(\sqrt{A} - a)^n = \alpha^n$, de unde ridicînd binomul la puterea a n—a, obținem ușor, de exemplu,
pentru $n = 2$:

$$\sqrt{A} = \frac{a^2 + A}{2a} - \frac{\alpha^2}{2a} = a_1 + \alpha_1, \tag{3}$$

pentru $n = 3$:

$$\sqrt{A} = \frac{a^3 + 3aA}{3a^2 + A} + \frac{\alpha^3}{3a^2 + A} = a_1' + \alpha_1'. \tag{4}$$

pentru $n = 5$:

$$\sqrt{A} = \frac{a^5 + 10a^3 A + 5aA^2}{5a^4 + 10a^2 A + A^2} + \frac{\alpha^5}{5a^4 + 10a^2 A + A^2} = a_1'' + \alpha_1''. \tag{5}$$

Dacă vom adopta ca valoare aproximativă a lui $\sqrt{A}$ primii termeni din aceste egalități, atunci valoarea absolută a erorii nu va depăși respectiv numerele

$$\frac{\gamma^2}{2a},\quad \frac{\gamma^3}{3a^2+A},\quad \frac{\gamma^5}{5a^4+10a^2A+A^2}.$$

De exemplu, $\sqrt{10}=3+\alpha\approx 3$ și $0<\alpha<0{,}2$ (deoarece $3{,}2^2=10{,}24$).

Potrivit formulei (3), avem

$$\sqrt{10}\approx\frac{3^2+10}{2\cdot 3}=\frac{19}{6}=3{,}1666\ldots$$

(prin exces, deoarece după formula (3) avem totdeauna $\alpha_1<0$ iar $|\alpha_1|<\frac{0{,}2^2}{2\cdot 3}<0{,}0067$), potrivit formulei (5),

$$\sqrt{10}\approx\frac{3^5+10\cdot 3^3\cdot 10+5\cdot 3\cdot 10^2}{5\cdot 3^4+10\cdot 3^2\cdot 10+10^2}=\frac{4\,443}{1\,405}=3{,}16227758.$$

(prin lipsă, deoarece, în acest caz $\alpha_1''>0$, iar

$$|\alpha_1''|<\frac{0{,}25}{1\,405}<0{,}000\,000\,23);$$

prin urmare, $3{,}16227758<\sqrt{10}<3{,}16227782$.

În mod analog putem extrage rădăcina de ordinul trei, de ordinul cinci etc.

Adunare și scădere în locul înmulțirii

Înainte de inventarea tabelelor de logaritmi, se foloseau pentru ușurarea înmulțirii numerelor de mai multe cifre așa numitele tabele *prostaferetice* (de la cuvintele grecești πρόσθεσις — adăugare și ἀφαίρεσις — scoatere, scădere) care erau tabele ale valorilor funcției $\left[\frac{z^2}{4}\right]$ (vezi § 2) pentru valorile naturale ale lui z.

Deoarece pentru a și b întregi avem

$$ab\equiv\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}=\left[\frac{(a+b)^2}{4}\right]-\left[\frac{(a-b)^2}{4}\right]$$

(numerele $a+b$ și $a-b$ sînt ori ambele pare, ori ambele impare; în ultimul caz, $\frac{(a+b)^2}{4}$ și $\frac{(a-b)^2}{4}$ au părțile fracționare egale), rezultă că

înmulțirea lui a cu b se reduce la determinarea lui $a+b$, a lui $a-b$ și, în sfîrșit, a diferenței dintre numerele $\left[\frac{(a+b)^2}{4}\right]$ și $\left[\frac{(a-b)^2}{4}\right]$, luate din tabele.

Pentru înmulțirea a trei numere poate fi folosită identitatea

$$abc=\frac{1}{24}\{(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a+c-b)^3-$$
$$-(b+c-a)^3\}, \qquad (6)$$

din care rezultă că dacă în tabele există valorile funcției $\frac{z^3}{24}$, calculul produsului abc se poate reduce la determinarea numerelor $a+b+c$, $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$, iar după acestea — cu ajutorul tabelelor a părții a doua din egalitatea (6).

Vom da ca exemplu o astfel de tabelă pentru $1 \leqslant z < 30$. Tabela cuprinde : cu cifre mari, valorile lui $\left[\frac{z^3}{24}\right]$, iar cu cifre mici valorile lui k, unde

$$\frac{z^3}{24}=\left[\frac{z^3}{24}\right]+\frac{k}{24}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 23,$$

Unități / Zeci	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0_1	0_8	1_3	2_{16}	5_5	9_0	14_7	21_8	30_9
1	41_{16}	55_{11}	72_0	91_{13}	114_3	140_{15}	170_{16}	204_{17}	243_0	285_{19}
2	333_8	385_{21}	443_{16}	506_{23}	576_0	651_1	732_8	820_3	914_{16}	1016_5

Nu este greu, folosind formula (6) și tabela, să obținem
$9 \cdot 9 \cdot 9 = 820_3 - 30_9 - 30_9 - 30_9 = 729$,
$17 \cdot 8 \cdot 4 = 1016_5 - 385_{21} - 91_{13} + 5_5 = 544$ (verificați !).

Despre calculul logaritmilor

Vom mai da descrierea unei metode simple care ne permite să calculăm logaritmii numerelor, cu ajutorul tabelei de cuburi ale numerelor naturale.

Fie

$$\lg 13 = c_0,\ c_1c_2c_3\cdots(_3) = c_0 + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \ldots,$$

aşadar logaritmul căutat este scris sub forma unei fracţii sistematice în sistemul de numeraţie cu baza 3.

Atunci

$$10^{c_0+\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{9}+\cdots}=13,$$

prin urmare, $c_0=1$.

Simplificînd ambii membri ai egalităţii cu $10^{c_0}=10$ şi ridicînd apoi la cub, obţinem

$$10^{c_1+\frac{c_2}{3}+\frac{c_3}{9}+\cdots}=1{,}3^3=2{,}197,$$

de unde $c_1=0$.

Deoarece, dacă am ridica exact la cub numărul 2,197 şi am efectua calculele următoare, am obţine numere foarte „greoaie", vom face în cele ce urmează calculele cu patru cifre semnificative, determinînd marginile *superioare* şi cele *inferioare*, (M.S. şi M.I.) ale numerelor care ne interesează (ori de cîte ori vom rotunji numerele, vom trece în coloana „M.I." valorile lor prin lipsă, iar în coloana „M.S." valorile lor prin adaos).

Calculele ulterioare ne vor da :

	M.I.	M.S.	
$10^{c_2+\frac{c_3}{3}+\cdots}$	10,60	10,61	$c_2=1$
$10^{c_3+\frac{c_4}{3}+\cdots}$	1,191	1,195	$c_3=0$
$10^{c_4+\frac{c_5}{3}+\cdots}$	1,689	1,707	$c_4=0$
$10^{c_5+\frac{c_6}{3}+\cdots}$	4,818	4,974	$c_5=0$
$10^{c_6+\frac{c_7}{3}+\cdots}$	111,8	123,1	$c_6=2$
$10^{c_7+\frac{c_8}{3}+\cdots}$	1,397	1,866	$c_7=0$
$10^{c_8+\frac{c_9}{3}+\cdots}$	2,726	6,498	$c_8=0$
$10^{c_9+\frac{c_{10}}{3}+\cdots}$	20,25	274,4	$c_9=1,\ c_9=2$
$10^{c_{10}+\frac{c_{11}}{3}+\cdots}$	8,303	20,67	$c_{10}=0,\ c_{10}=1$
$10^{c_{11}+\frac{c_{12}}{3}+\cdots}$	572,4	8,832	$c_{11}=2,\ c_{11}=0$

De aci

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^6}+\frac{1}{3^9}+\frac{2}{3^{11}}<\lg 13<1+\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^6}+\frac{2}{3^9}+\frac{1}{3^{10}}+\cdots$$

sau

$$1{,}113911<\lg 13<1.113979.$$

După ce calculați prin aceeași metodă logaritmii diverselor numere, încercați să confruntați rezultatele obținute cu valorile din tabelele de logaritmi.

§ 9. GIGANȚI NUMERICI

În fizică, în chimie, în astronomie întîlnim adeseori „giganți" și „pitici" numerici; de exemplu, distanțele de la Pămînt pînă la stelele cele mai apropiate sînt cuprinse între 10^{13} și 10^{14} km, raza atomului este o mărime de ordinul a 10^{-8} cm, numărul de molecule dintr-un mol de substanță este aproximativ egal cu $6\cdot10^{23}$ (numărul lui Avogadro).

Pentru a ne da mai bine seama de mărimile acestor numere, se folosesc cu succes diverse artificii. Astfel, următorul exemplu ne dă o idee intuitivă despre numărul Avogadro :

Dacă am amesteca uniform conținutul unui pahar de apă cu molecule „marcate" în apa celor cinci oceane ale globului în fiecare pahar de apă din ocean am avea cel puțin 500 de molecule „marcate" ([26]).

Este mult mai greu să ne facem o idee clară despre numerele mari și mici pe care le întîlnim în rezolvarea diverselor probleme de matematică. Să cercetăm cîteva exemple.

1) $\lg x$ crește o dată cu x, atît de încet, încît inegalitatea $\lg x>100$ va deveni valabilă abia pentru $x>10^{100}$.

Pentru a vă face o idee despre mărimea acestui număr, calculați și convingeți-vă ([27]) că el este mai mare decît numărul de molecule de apă necesar pentru a umple un cub cu muchia de 70 milioane ani lumină (considerînd că densitatea apei rămîne egală cu 1 și că într-un cm^3 de apă avem $\frac{1}{3}\cdot10^{23}$ molecule).

Cum să ne imaginăm, în aceste condiții, mărimea numărului $K=9^{9^9}\approx4{,}28\cdot10^{369\,693\,099}$ (verificați, cunoscînd că $\lg 9=0{,}95424250943932...$), în comparație cu care pînă și numărul vitelor din cireada despre care este vorba în problema lui Arhimede ($N\approx77\cdot10^{206\,543}$; vezi § 4) este un număr de „dimensiuni ultra ultra... ultra microscopice" !

Dar de numele lui Arhimede este legat și un număr care depășește considerabil pe 9^{9^9}. În scrierea sa „Psammit" (Calculul firelor de nisip"), Arhimede merge cu clasificarea numerelor pînă la $10^{80\,000\,000\,000\,000\,000}$ (în notațiile noastre; după clasificarea lui Arhimede acest număr conține o miriadă de miriade de unități de ordinul miriadelor de miriade din perioada miriadelor de miriade; miriada = 10 000).

Dar și acest gigant a lui Arhimede rămîne în urma numărului cu aspect „insignifiant" $Q = 4^{4^{4^4}}$. În adevăr $Q = 4^{4^{256}} > 4^{1,33 \cdot 10^{154}} > 10^{8 \cdot 10^{153}}$ (verificați !) ([27a]). Pentru a ne face o idee despre „lungimea" numărului Q, scris în sistemul zecimal (nu însă, bineînțeles, despre numărul Q însuși), o carte apărută la sfîrșitul secolului trecut spune: „Închipuiți-vă un segment atît de lung încît o rază luminoasă ar avea nevoie de 10 quintilioane (10^{30}) de ani pentru a parcurge acest drum. Apoi imaginați-vă o sferă cu diametrul egal cu acest segment, plină cu cerneală tipografică. Toată această cerneală nu ar fi suficientă pentru a tipări numărul nostru, chiar cu literele cele mai mici de care dispunem".

În adevăr, se constată ușor ([28]) că volumul acestei sfere este mai mic de $\frac{1}{2} \cdot 10^{144}$ cm^3 (verificați !).

Presupunînd că fiecare centimetru cub de cerneală permite să tipărim 1 000 000 000 de cifre, am putea tipări doar un număr care să conțină mai puțin de $\frac{1}{2} \cdot 10^{153}$ cifre, pe cînd numărul Q cuprinde peste $8 \cdot 10^{153}$ cifre.

2) Este cunoscut că a^x (pentru $a > 1$) crește o dată cu x mai repede decît x^n ($n > 0$), iar x^m crește mai repede decît $\log_b x (b > 1)$.

Aceasta înseamnă că

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \text{ și } \lim_{x \to \infty} \frac{\log_b x}{x^n} = 0.$$

Dar, de exemplu, egalitatea $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, unde $f(x) = \frac{x^{1\,000\,000}}{1{,}000\,001^x}$ poate părea paradoxală, dacă judecăm după începutul tabelei.

x	0	1	2	10^6	10^7	10^{13}	10^{14}
$x^{1\,000\,000}$	0	1	$2^{1\,000\,000}$	$10^{6\,000\,000}$	$10^{7\,000\,000}$	$10^{13\,000\,000}$	$10^{14\,000\,000}$
$1{,}000001^x$	1	1,000001	1,000002	$e \approx 2{,}718$	$e^{10} \approx 10^{4,34}$	$e^{10^7} \approx \approx 10^{4,34 \cdot 10^6}$	$e^{10^8} \approx \approx 10^{43,429 \cdot 10^6}$

Dar sfîrșitul tabelei ne arată că pentru o anumită valoare a lui x, cuprinsă în intervalul $(10^{13}, 10^{14})$, $f(x)=1$, iar deoarece $\lg f(10^{14}) \approx \approx -29{,}43 \cdot 10^6$ (verificați !), avem $f(10^{14}) < 10^{-29 \cdot 10^6}$. Numărul e, care figurează în tabelă, este baza așa-numiților logaritmi *naturali*; $\log_e N = \ln N$, relația dintre logaritmul natural și logaritmul zecimal al unui număr fiind $\ln N \approx \lg N \cdot 2{,}3025851$.

În matematica superioară se demonstrează că

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818..,$$

de unde $\lg e \approx 0{,}4342945$ și $e \approx 10^{0{,}4342945}$.

Încercați să demonstrați ([29]) că pentru funcția

$$\varphi(x) = \frac{\lg_{1{,}000001} x}{x^{0{,}000001}},$$

$\varphi(e^{31\,000\,000}) > 1$, însă $\varphi(e^{32\,000\,000}) < 1$.

3) Expresia $n!$ crește extrem de repede o dată cu n. Pentru a evalua viteza de creștere a acestei funcții putem folosi inegalitățile $\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{1}{12n}}$ (formula lui Stirling), de unde

$$\frac{1}{2} \ln (2\pi n) + n \ln n - n < \ln (n!) < \frac{1}{2} \ln (2\pi n) + n \ln n - n + \frac{1}{12n}.$$

Pentru valori mari ale lui n, aceste inegalități ne dau limite foarte apropiate pentru $\ln (n!)$. Cu ajutorul lor ne convingem ușor ([30]) că după înmulțirile corespunzătoare numărul 10 000 ! va „conține" 35 660 cifre, numărul 100 000 ! va avea 456 574 cifre, iar numărul 1 000 000 ! va fi de 5 565 709 cifre.

§ 10. JOCURI CU GRĂMEZI DE OBIECTE

Dăm mai jos descrierea a trei jocuri, a căror teorie este complet pusă la punct. În fiecare dintre ele, cele mai multe poziții inițiale sînt favorabile pentru jucătorul care face prima mutare, adică în cazul cînd joacă corect, cîștigul său este asigurat, pe cînd pentru adversarul său sînt favorabile numai situații excepționale (se subînțelege că ambii jucători sînt familiarizați cu teoria jocului). Prin urmare, ele pot servi ca jocuri numai pentru persoane care nu cunosc teoria lor.

Jocul lui Bachet

Dintr-o grămadă care conține inițial n obiecte, doi jucători iau fiecare pe rînd un număr arbitrar de obiecte (dar nu mai puțin decît unu și nu mai mult decît a obiecte dintr-o dată). Cîștigă cel care, la o anumită mutare, va putea să ia toate obiectele rămase.

Pentru jucătorul care vine la rînd va fi defavorabil dacă numărul de obiecte din grămadă (îl vom nota cu m) este un multiplu al lui $a+1$. În adevăr, dacă $m=a+1$, oricare ar fi mutarea respectivului jucător, adversarul poate să ia dintr-o dată toate obiectele rămase. Dacă însă $m=(a+1)s$ (unde s este un număr natural arbitrar), atunci, după orice mutare a primului jucător, adversarul, făcîndu-și mutarea corespunzătoare, poate lăsa în grămadă $(a+1)(s-1)$ obiecte, apoi $(a+1)(s-2)$ obiecte etc., făcînd pînă la urmă ca numărul de obiecte din grămadă să fie $a+1$, ceea ce îi asigură cîștigul.

În toate celelalte poziții inițiale (cînd $m=(a+1)s+r$, $1 \leqslant r \leqslant a$), primul jucător, luînd r obiecte, îl silește pe adversarul său să piardă.

Jocul acesta a fost descris de Bachet încă în 1612, într-o formă oarecum diferită: cei doi jucători spun pe rînd cîte un număr cuprins între 1 și 10, cîștigătorul fiind cel care va reuși cel dintîi să aducă pînă la 100 suma numerelor rostite de ambii jucători.

Țzeanșidzî (un joc cu două grămezi de obiecte)

Mult mai complicată este teoria jocului popular chinezesc *Țzeanșidzî* („alegerea pietrelor"). Condițiile sale sînt următoarele:

Din două grămezi, formate din obiecte oarecare, cei doi jucători pot să ia pe rînd fie 1) un număr arbitrar de obiecte dintr-o grămadă (chiar și toate obiectele dintr-o dată, dar nu mai puțin decît unul); fie 2) simultan același număr (tot arbitrar) de obiecte, însă nu mai puțin de un singur obiect din fiecare grămadă.

Este considerat cîștigător cel care venindu-i rîndul să-și facă mutarea — vom numi astfel oricare dintre cele două operații menționate mai sus — va lua toate obiectele rămase.

Vom denumi poziție (k, l) sau (l, k) poziția în care grămezile conțin respectiv k și l obiecte (ordinea este aici indiferentă). Să construim așa-numitele poziții „singulare":

(c_0, d_0), (c_1, d_1), (c_2, d_2),..., (c_n, d_n),..., (1) plecînd de la următoarele condiții:

1) $c_0=d_0=0$.

2) Componenta c_n a poziției (c_n, d_n) $(n=1, 2, 3,...)$ se ia egală cu cel mai mic dintre numerele naturale nefolosite în construirea pozițiilor (c_0, d_0), (c_1, d_1),..., (c_{n-1}, d_{n-1}).

3) $d_n=c_n+n$.

Celelalte poziții le vom denumi *nesingulare*.

Iată primele poziții singulare: (0, 0), (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), (9, 15).

Pozițiile singulare au trei proprietăți:

I) Fiecare număr natural intră într-o singură poziție singulară.

În adevăr, dacă luăm pentru c_n cel mai mic dintre numerele nefolosite în pozițiile singulare precedente, garantăm că fiecare număr natural va figura neapărat în una dintre pozițiile (1). Este clar că c_n nu coincide cu nici una dintre componentele pozițiilor singulare precedente, deoarece pentru $k<n$ avem $d_n=c_n+n>c_k+k=d_k>c_k$, deci nici d_n nu poate coincide cu nici una dintre componentele pozițiilor precedente.

II) Fiecare mutare transformă orice poziție singulară într-o poziție nesingulară.

În adevăr, dacă mutarea efectuată schimbă numai una dintre componentele poziției singulare (c_n, d_n), atunci obținem o poziție nesingulară, deoarece componenta rămasă neschimbată nu poate figura în două poziții singulare diferite; dacă însă mutarea făcută micșorează în egală măsură ambele componente c_n și d_n, atunci diferența dintre ele rămîne egală cu n, în timp ce în toate celelalte poziții singulare (c_k, d_k) diferența dintre componente, d_k-c_k, este egală cu $k\neq n$ (vezi condiția 3).

III) De la orice poziție nesingulară se poate trece, printr-o mutare corespunzătoare, la o poziție singulară.

Demonstrație: Dacă este dată o poziție nesingulară (a, a), unde $a\neq 0$, atunci, scoțînd cîte a obiecte din ambele grămezi, se poate ajunge la poziția singulară (0, 0). Dacă este dată poziția nesingulară (a, b), unde $a<b$, sînt posibile următoarele variante:

1) $a=c_k$; $b>c_k+k=d_k$.

Evident, este suficient să se ia din grămada a doua $b-d_k$ obiecte pentru a ajunge la poziția (c_k, d_k).

2) $a=c_k$; $b<c_k+k$, adică $b-c_k=b-a=h<k$. Este suficient să se scoată din ambele grămezi cîte c_k-c_h obiecte; aceasta va conduce la poziția singulară $(c_h, b-c_k+c_h)=(c_h, h+c_h)=(c_h, d_h)$.

3) $a=d_k$. Este suficient să se ia din grămada a doua $b-c_k$ obiecte; aceasta va da poziția singulară $(d_k, c_k)=(c_k, d_k)$.

Din proprietățile (II) și (III) rezultă că, după o mutare a unui jucător făcută dintr-o poziție singulară, adversarul poate reduce situația la una dintre pozițiile singulare. Dacă adversarul repetă această manevră, el va obține poziții singulare cu componente tot

mai mici, pînă va ajunge la poziția singulară $(c_0, d_0) = (0, 0)$. Aceasta înseamnă că adversarul va scoate ultimele obiecte, adică va învinge. Dacă însă poziția este nesingulară, atunci primul jucător o poate reduce la una singulară. Procedînd de fiecare dată astfel, el își asigură victoria.

Așadar, dacă ambii parteneri joacă bine, cel care face prima mutare are cîștigul asigurat, în cazul cînd poziția inițială este nesingulară, și va pierde inevitabil dacă această poziție este singulară.

Vom menționa fără demonstrație că c_k și d_k se pot calcula, cînd k este dat, după formulele

$$c_k = \left\lfloor k \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor, \tag{2}$$

$$d_k = \left\lfloor k \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor. \tag{3}$$

De exemplu, pentru $k = 100$, avem

$$c_{100} = \left\lfloor 100 \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor = [100 \cdot 1{,}6180327 \cdots] = 161,$$

$$d_{100} = \left\lfloor 100 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor = [100 \cdot 2{,}6180327 \cdots] = 261.$$

Din formulele (2) și (3) avem $c_k < k \frac{1+\sqrt{5}}{2} < c_k + 1$ adică

$$c_k \cdot 0{,}6180327 \cdots = c_k \frac{\sqrt{5}-1}{2} < k < (c_k+1) \frac{\sqrt{5}-1}{2} =$$

$$= (c_k + 1)\ 0{,}6180327..., \tag{4}$$

$$d_k \cdot 0{,}3819672 \cdots = d_k \frac{3-\sqrt{5}}{2} < k < (d_k+1) \frac{3-\sqrt{5}}{2} =$$

$$= (d_k + 1)\ 0{,}3819672... \tag{5}$$

Pentru a afla mai repede mutarea adecvată în orice poziție dată (a, b), este comod să avem la îndemînă o tabelă destul de bogată a pozițiilor singulare. Dacă însă nu avem o astfel de tabelă sau dacă nici unul dintre numerele a și b nu intervine în tabela existentă a pozițiilor singulare, atunci trebuie calculat în care dintre intervalele

$$\left(a \frac{\sqrt{5}-1}{2}, (a+1) \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \quad \left(a \frac{3-\sqrt{5}}{2}, (a+1) \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

este conținut un număr întreg. Dacă un anumit număr întreg k este cuprins în primul interval, atunci $a=c_k$, iar dacă este în al doilea, atunci $a=d_k$. În ambele cazuri, conform proprietății III, putem ajunge la o poziție singulară. Se demonstrează ([31]) că un număr întreg trebuie să fie cuprins în unul dintre aceste intervale, ambele intervale neputînd să conțină simultan un număr întreg.

Nim (un joc cu trei grămezi de obiecte)

Originea acestui joc este necunoscută, iar regulile lui sînt: se dau trei grămezi de obiecte; cei doi jucători pot lua pe rînd un număr arbitrar de obiecte (dar nu mai puțin decît unul) dintr-o grămadă (de fiecare dată alegerea acesteia este la latitudinea jucătorului). Cîștigă cel care, atunci cînd îi vine rîndul să-și facă mutarea, ia toate obiectele rămase.

Pentru a lămuri teoria acestui joc este util să ne amintim că orice număr poate fi reprezentat (și anume, într-un mod unic) sub forma unei sume de puteri d i f e r i t e ale lui 2.

De exemplu,

$$17=2^4+2^0,$$
$$29=2^4+2^3+2^2+2^0,$$
$$97=2^6+2^5+2^0.$$

Vom denumi *singulară* o poziție (h, k, l) în care grămezile cuprind respectiv h, k și l obiecte, dacă fiecare dintre numerele 2^s $(s=0, 1, 2,...)$ ori nu figurează de loc în dezvoltarea numerelor h, k, l sub formă de sume de puteri ale lui 2, ori intervin numai de două ori în aceste dezvoltări.

Dacă însă cel puțin unul dintre numerele 2^s $(s=0, 1, 2,...)$ intră o dată sau de trei ori în dezvoltările numerelor h, k, l, vom spune că poziția (h, k, l) este nesingulară.

De exemplu, poziția (18, 21, 7) va fi singulară, deoarece $18=2^4+2^1$; $21=2^4+2^2+2^0$; $7=2^2+2^1+2^0$. Evident, oricare ar fi n, poziția $(0, n, n)$ (o grămadă a fost luată) va fi singulară.

Teoria acestui joc este bazată pe următoarele teoreme.

T e o r e m a I. *Jucătorul căruia îi vine rîndul să mute în pozițiile singulare* (1, 2, 3) *și* $(0, n, n)$ *este condamnat să piardă.*

În adevăr, oricare ar fi mutarea primului jucător din poziția $(0, n, n)$, adversarul nu are decît să ia același număr de obiecte din cealaltă grămadă, pentru a reduce situația la poziția $(0, n, m)$, unde $m<n$; această tactică îl va duce pînă la urmă la poziția (0, 0, 0), adică la cîștig.

Examinînd toate variantele, puțin numeroase, cititorul se va convinge ușor că și de la poziția inițială (1, 2, 3) este de asemenea inevitabil ca jucătorul care face prima mutare să piardă.

Teorema II. *Pentru două numere arbitrare m și n putem alege (și anume în mod unic) un al treilea număr p, astfel ca poziția (m, n, p) să fie singulară.*

În adevăr, este suficient (și necesar) ca puterile lui 2 care intră cîte o singură dată în dezvoltările numerelor m și n să facă parte din numărul p, iar puterile lui 2, care nu fac parte din nici unul dintre numerele m și n, sau care figurează atît în m, cît și în n, să nu fie introduse în numărul p.

De exemplu, pentru $m=19=2^4+2^1+2^0$ și $n=37=2^5+2^2+2^0$, trebuie să-l formăm pe p din 2^5, 2^4, 2^2, 2^1, ceea ce ne va da $p=54$, care dă cu numerele 19 și 37 o poziție singulară; toate celelalte numere formează cu 19 și cu 37 poziții nesingulare.

Teorema III. *Orice mutare făcută într-o poziție singulară (k, l, m) conduce la o poziție nesingulară.*

Aceasta este o consecință directă a teoremei II.

Teorema IV. *De la orice poziție nesingulară se poate trece, printr-o mutare corespunzătoare, la una singulară.*

Pentru demonstrație vom considera următoarele două cazuri:

1) Puterea cea mai mare a lui 2 figurează numai în unul dintre cele trei numere sau simultan în toate trei; atunci este suficient ca cel mai mare dintre aceste numere să fie micșorat pînă la un număr care formează cu celelalte două o poziție singulară. Dacă însă în poziția inițială cele două numere mai mari sînt egale, atunci poate fi micșorat oricare dintre ele (se poate chiar lua de tot grămada mai mică).

2) Să admitem că puterea cea mai mare a lui 2, de exemplu 2^s, figurează numai în dezvoltarea a două numere; atunci trebuie să căutăm pe 2^{s-1}, 2^{s-2} etc., pînă vom ajunge la o putere a lui 2 (o vom nota cu 2^r) care figurează fie numai în dezvoltarea unui număr, fie în toate trei.

Pentru obținerea unei poziții singulare este suficient să micșorăm unul dintre numere în așa fel încît să se schimbe numai „partea lui finală" (adică partea corespunzătoare din suma de puteri de 2, care conține pe 2^r și puterile mai mici); în aceste condiții, conform primelor două cazuri analizate mai sus, trebuie micșorat numărul cu partea finală maximă; dacă însă două numere au aceeași parte finală maximă, o putem micșora la oricare dintre ele (sau să scoatem de tot partea finală a celui de-al treilea număr).

Exemple:

1) $h=14=2^3+2^2+2^1$,

$k=21=2^4+2^2+2^0$,

$l=39=2^5+2^2+2^1+2^0$.

Avem aici primul caz; este suficient să micşorăm numărul l, astfel încît să obţinem numărul $l'=2^4+2^3+2^1+2^0=27$, adică din grămada a treia trebuie să scoatem 12 obiecte.

2) $$h=81=2^6+2^4+2^0,$$
$$k=121=2^6+2^5+2^4+2^3+2^0,$$
$$l=55=2^5+2^4+2^2+2^1+2^0.$$

Aici fiecare dintre numerele 2^6 şi 2^5 figurează de cîte două ori în dezvoltările numerelor noastre; deoarece 2^4 intră în toate cele trei numere, iar numărul k are partea finală maximă, trebuie să-l reducem la 2^2+2^1, adică să transformăm pe k în $k'=2^6+2^5+2^2+2^1=102$, care formează cu h şi cu l o poziţie singulară.

Aşadar, scoţînd din grămada a doua 19 obiecte, ajungem la poziţia singulară (81, 102, 55).

3) $$h=29=2^4+2^3+2^2+2^0,$$
$$k=58=2^5+2^4+2^3+2^1,$$
$$l=45=2^5+2^3+2^2+2^0.$$

Este a doua variantă a celui de-al doilea caz: 2^5 şi 2^4 intervin de cîte două ori în dezvoltări, iar partea finală cea mai mare ($2^3+2^2+2^0$) apare la două numere: h şi l. Prin urmare, putem micşora la unul dintre ele partea finală cu şase unităţi, reducînd-o la $2^2+2^1+2^0=7$, ceea ce va conduce fie la poziţia singulară $(h-6, k, l)=(23, 58, 45)$, fie la poziţia singulară $(h, k, l-6)=(29, 58, 39)$. Dar putem pur şi simplu să suprimăm partea finală a numărului k, ceea ce ne va conduce la poziţia singulară $(h, k\text{-}10, l)=(29, 48, 45)$.

Din ultimele două teoreme rezultă:

1) Jucătorul care face prima mutare din orice poziţie singulară este condamnat să piardă, deoarece adversarul, mutînd la rîndul său, poate crea o nouă poziţie singulară şi, repetîndu-şi manevra, va ajunge mai curînd sau mai tîrziu la poziţia $(0, n, n)$ sau la $(1, 2, 3)$, ceea ce îi va asigura victoria.

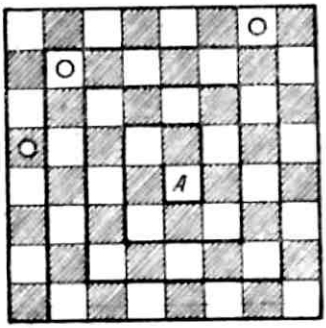


Fig. 9

2) Dacă primul jucător începe de la orice poziţie nesingulară, el trebuie să ajungă la o poziţie singulară şi atunci victoria sa va fi sigură.

Jocul „Nim mai poate fi prezentat şi astfel : pe o tablă de şah aşezăm trei piese în locuri alese la întîmplare ; cei doi jucători mişcă pe rînd piesele după o

spirală (fig. 9) spre cîmpul A, deplasînd într-o mutare o piesă cu un număr arbitrar de cîmpuri (în aceste condiții pot fi situate în același rînd două pise deodată și chiar toate trei). Jocul se termină atunci cînd toate piesele au ajuns în cîmpul A și se consideră cîștigător jucătorul a cărui mutare a încheiat jocul.

Observația 1. Putem încerca să construim o teorie a jocurilor cu condiții întrucîtva modificate, de exemplu, permițînd în jocul lui Bachet să se scoată deodată între 3 și 15 obiecte, cît timp grămada conține mai mult de 15 obiecte și între 1 și 10 obiecte, atunci cînd numărul lor în grămadă scade sub 15.

În jocul cu cele două grămezi de obiecte putem, bunăoară, să limităm numărul de obiecte scoase printr-o mutare sau să permitem scoaterea concomitentă a obiectelor din ambele grămezi numai într-un raport de 1 : 2 etc.

În jocul „Nim" putem introduce o mutare suplimentară, și anume scoaterea unui număr egal de obiecte din două grămezi sau chiar din toate trei.

Desigur, nu în toate cazurile se poate construi ușor teoria jocului și nu totdeauna ea va fi simplă și elegantă; este însă cît se poate de probabil ca în anumite cazuri să obținem rezultate interesante.

Observația 2. Chiar dacă ambii jucători cunosc teoria celui de-al doilea sau celui de-al treilea joc, dar se limitează timpul de gîndire la fiecare mutare, rezultatul jocului va depinde de măiestria jucătorilor.

Încercați, în jocul cu două grămezi de obiecte:

a) să găsiți mutările corecte în fiecare dintre următoarele poziții: (27, 37), (14, 90), (47, 69) ([32]);

b) să stabiliți care dintre numerele 40, 55, 140, 400 vor fi componentele mai mici și care componentele mai mari ale unor poziții singulare și aflați în fiecare caz a doua componentă a poziției ([33]);

c) să construiți pozițiile singulare pînă la (c_{10}, d_{10}), folosind condițiile 1) — 3) (pag. 51-52) și după formulele (2) și (3). Comparați rezultatele.

În jocul „Nim" găsiți mutarea adevărată (sau mutările adecvate) în fiecare din următoarele poziții: (10, 17, 25), (47, 99, 181), (25, 43, 50), (29, 29, 18), (93, 29, 74) ([34]).

§ 11. MELEDA

Jocul *Meleda*, de origine chineză, a fost descris încă la jumătatea secolului al XVI-lea de matematicianul italian Cardano. Jocul este reprezentat în fig. 10, *a*.

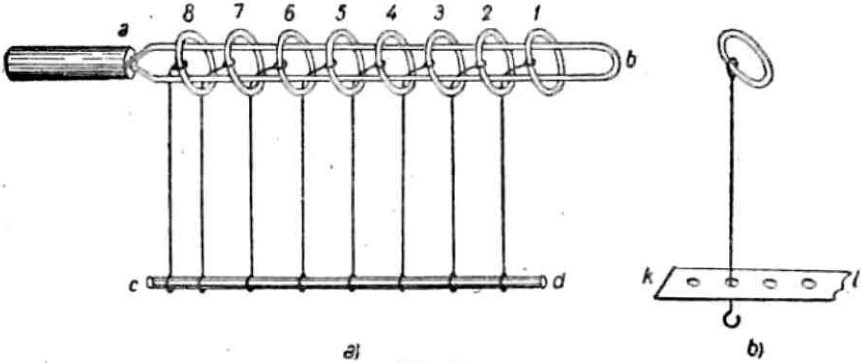


Fig. 10

Conform condiției jocului, de pe broșa de sîrmă *ab*, prevăzută cu un mîner, trebuie scoase toate inelele unite între ele prin fire legate de bara *cd*.

Firele pot fi înlocuite prin sîrme, iar bara *cd* prin rigleta *kl*, în care s-au făcut găuri mici și prin care sînt trecute sîrmele respective, după ce capetele lor au fost îndoite sub formă de buclă (fig. 10, *b*).

Întocmirea planului soluției, care rezultă din particularitățile constructive ale meledei, și calculul tuturor operațiilor necesare în acest scop formează o interesantă problemă de matematică.

Dacă avem în mînă o meledă (și este foarte ușor să o confecționăm), ne convingem ușor că:

1) inelul 1 poate fi scos (adică el poate fi tras jos de pe broșă și trecut în jos prin interiorul ei) sau ridicat (adică trecîndu-l în sus prin broșă îl putem îmbrăca peste ea), *indiferent* dacă la momentul respectiv oricare dintre celelalte inele este îmbrăcat peste broșă sau scos de pe ea;

2) oricare dintre inelele cu numerele 3, 4, 5, 6,... poate fi coborît sau ridicat dacă și numai dacă la momentul respectiv inelul avînd numărul cu o unitate mai mic va fi îmbrăcat peste broșă, iar toate celelalte inele cu numere mai mici vor fi coborîte; în aceste condiții este indiferent în ce stare se va afla oricare dintre inelele cu număr mai mare decît cel considerat;

3) inelul 2 poate fi coborît sau ridicat în orice poziție a celorlalte inele, n u m a i c o n c o m i t e n t cu i n e l u l 1.

În cele ce urmează vom denumi *mutare* ridicarea sau coborîrea oricărui inel, precum și ridicarea sau coborîrea concomitentă a inelelor *1* și *2*.

Să admitem că meleda are n inele: A, B, C, D, ... , K, L, M, numerotate respectiv cu n, n-1, n-2, n-3, ... , 3, 2, 1. Pe schemă, vom reprezenta inelele așezînd litera corespunzătoare deasupra liniei orizontale, dacă inelul a fost ridicat, și dedesubtul ei, dacă a fost coborît.

Să notăm cu μ_k ($k \leqslant n$) cel mai mic număr de mutări necesare pentru a coborî (sau pentru a ridica) inelele cu numerele de ordine 1, 2, ..., $k-1$, k.

Coborîrea inelului al n-lea (vezi *I* în fig. 11) trebuie să fie precedată de poziția *II*, pentru realizarea căreia sînt necesare cel puțin u_{n-2} mutări. Lăsînd în jos în mutarea următoare, inelul A, ajungem la poziția *III*, efectuînd în total $u_{n-2}+1$ mutări Ne convingem ușor că :

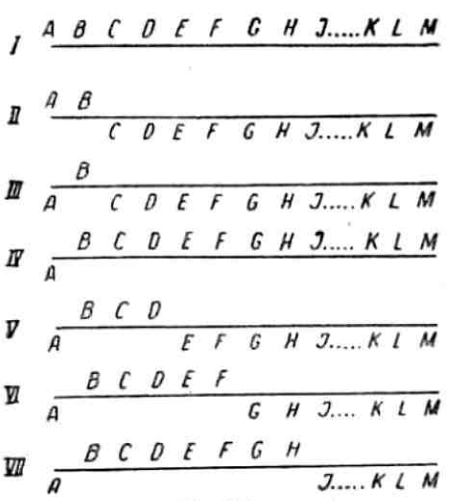


Fig. 11

Plecînd de la poziția *III*, pentru a coborî inelul B, trebuie să trecem prin poziția *IV* ca stadiu intermediar.

În adevăr, pentru a-l coborî pe B, inelul C trebuie să fie îmbrăcat peste broșă; poziția care apare imediat după ridicarea inelului C este reprezentată în schema *V*, unde inelul D împiedică lăsarea în jos a lui B.

Repetînd acest raționament, ne convingem că coborîrea lui D trebuie să fie precedată neapărat de poziția *VI*, în care coborîrea lui D este împiedicată de inelul F; căutînd să-l coborîm pe acesta, va trebui să trecem prin poziția *VII* etc.

În concluzie, vom constata că poziția *IV* nu poate fi evitată.

Dat fiind că trecînd de la *III* la *IV* avem nevoie cel puțin de u_{n-2} mutări (tot atîtea ca și pentru a trece de la *IV* la *III*) și deoarece pentru a coborî toate inelele din poziția *IV*, care reprezintă în genul său o meleda cu n-1 inele, va mai fi nevoie de cel puțin u_{n-1} mutări, reiese că

$$u_n = u_{n-2} + 1 + u_{n-2} + u_{n-1} = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 1. \qquad (1)$$

Evident, $u_1 = u_2 = 1$. Folosind relația de recurență (1), obținem

$$u_3 = u_2 + 2u_1 + 1 = 4,$$

$$u_4 = u_3 + 2u_2 + 1 = 7,$$

$$u_5 = u_4 + 2u_3 + 1 = 16 \text{ etc.}$$

Aplicînd metoda inducției matematice, ne convingem ușor că

$$u_n = \frac{1}{2}[2^n - 1 - (-1)^n],$$

de unde rezultă că u_n crește foarte repede o dată cu creșterea lui n; de exemplu, $u_{21} = 2^{20} = 1\,048\,576$.

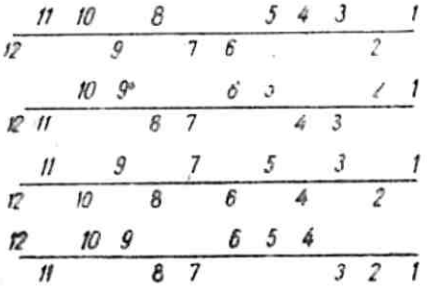


Fig. 12

Problemă. În fiecare dintre pozițiile reprezentate în fig. 12 să se găsească drumul cel mai scurt pentru a coborî și drumul cel mai scurt pentru a ridica toate inelele și să se determine numărul de mutări corespunzător ([35]).

Observație. Dacă rolul inelelor va fi preluat de jucători numerotați, care ies dintr-un cerc desenat pe pămînt sau care intră în el, în conformitate cu cele trei „reguli" de coborîre și de ridicare a inelelor pe care le-am indicat mai sus, vom obține un joc mai viu, avînd aceeași schemă de principiu.

Această modificare a jocului merită atenție și pentru că, scăpînd de particularitățile constructive ale meledei, putem varia ușor condițiile jocului, subordonînd deplasările jucătorilor altor reguli și căutînd soluțiile cele mai rapide ale problemei, în aceste condiții schimbate. Dimpotrivă, construirea unui analog din sîrmă al jocului astfel modificat prezintă o altă problemă, a cărei soluționare poate fi încununată prin crearea unei enigme noi și interesante.

12. JOCUL LUI LUC

În jocul imaginat de matematicianul francez Luc (căruia el i-a dat denumirea de „turnul din Hanoi") se cere să mutăm n plăci circulare de dimensiuni diferite de pe coloana A (fig. 13) pe coloana B, folosind coloana auxiliară C, avînd voie să deplasăm într-o singură mutare numai o singură placă (de pe orice coloană pe oricare alta), dar neavînd voie să așezăm o placă mai mare peste alta mai mică.

Se cere să indicăm calea cea mai scurtă pentru soluționarea problemei și să determinăm numărul corespunzător de mutări u_n.

Deoarece pentru a trece placa de jos pe coloana B trebuie întîi să transportăm (folosind coloana C ca auxiliară) celelalte plăci pe coloana C, ceea ce va necesita cel puțin u_{n-1} mutări, rezultă în mod evident că $u_n = u_{n-1} + 1 + u_{n-1} = 2u_{n-1} + 1$, de unde, aplicînd metoda inducției matematice ([36]), obținem cu ușurință că $u_n = 2^n - 1$.

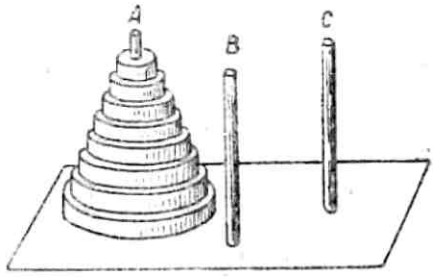


Fig. 13

Iubitorii de matematică își pot pune o serie de probleme particulare și generale legate de jocul lui Luc. Să notăm plăcile cu 1, 2, 3, 4, ..., în ordinea creșterii dimensiunilor lor. Putem căuta, bunăoară, numărul minim de mutări care ne permit să trecem de la poziția $\{A\,(8,\ 4,\ 3),\ B\,(7,\ 5,\ 1),\ C\,(6,\ 2)\}$ — între paranteze sînt indicate numerele de ordine ale plăcilor aflate pe fiecare coloană, luate de jos în sus — la poziția $B\,(8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1)$ sau de la poziția

$$\{A\,(2m,\ 2m-2,\ 2m-4,\ \ldots,\ 6,\ 4,\ 2),\ B\,(2m-1,\ 2m-3,\ \ldots,\ 5,\ 3,\ 1)\}$$

sau

$$\{A\,(2m,\ 2m-1,\ \ldots,\ m+2,\ m+1),\ B\,(m,\ m-1,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1)\}$$

la poziția

$$B\,(2m,\ 2m-1,\ 2m-2,\ \ldots,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1).$$

§ 13. SOLITARUL

Jocul denumit *solitarul* se face pe o tablă cu treizeci și trei de cîmpuri (fig. 14). O astfel de tablă se obține ușor, acoperind o tablă de șah cu o foaie de carton în care am decupat o figură în formă de cruce. În figura 14 fiecare cîmp este notat cu o pereche de numere, arătînd linia orizontală și cea verticală la intersecția cărora se află respectivul cîmp.

		73	74	75		
		63	64	65		
51	52	53	54	55	56	57
41	42	43	44	45	46	47
31	32	33	34	35	36	37
		23	24	25		
		13	14	15		

Fig. 14

La începutul jocului, toate cîmpurile, cu excepția unuia singur, sînt ocupate cu piese.

Trebuie scoase 31 piese, indicîndu-se cîmpul „inițial" gol (a, b) și cel „final"

(c, d) în care trebuie să se afle piesa rămasă la sfîrşitul jocului. Regulile jocului sînt următoarele: orice piesă poate fi scoasă de pe tablă dacă alături de ea (orizontal sau vertical) se află de o parte o piesă („cea care o bate"), iar de partea cealălaltă un cîmp gol pe care trebuie trecută piesa „care bate".

Din teoria acestui joc rezultă că soluţia se va obţine numai şi numai în cazul cînd $a \equiv c \pmod 3$ şi $b \equiv d \pmod 3$.)

Dăm ca exemplu soluţia problemei în care cîmpul (44) este atît iniţial cît şi final:

1. 64 — 44
2. 56 — 54
3. 44 — 64
4. 52 — 54
5. 73 — 53
6. 75 — 73
7. 43 — 63
8. 73 — 53
9. 54 — 52
10. 35 — 55
11. 65 — 45
12. 15 — 35
13. 45 — 25
14. 37 — 35
15. 57 — 37
16. 34 — 36
17. 37 — 35
18. 25 — 45
19. 46 — 44
20. 23 — 43
21. 31 — 33
22. 43 — 23
23. 51 — 31
24. 52 — 32
25. 31 — 33
26. 14 — 34
27. 34 — 32
28. 13 — 33
29. 32 — 34
30. 34 — 54
31. 64 — 44

Aici s-a trecut pentru fiecare mutare a piesei „care bate" numărul cîmpului iniţial şi al cîmpului în care el trebuie aşezat, scoatem (de pe tablă piesa aflată în cîmpul intermediar).

Încercaţi să scoateţi 31 de piese: *a)* în cazul cîmpului iniţial (5, 7) şi al cîmpului final (2, 4), sau *b)* în cazul cîmpului iniţial (5, 5) şi al celui final (5, 2) ([37]).

§ 14. „JOCUL CU 15" ŞI ALTE JOCURI ASEMĂNĂTOARE

Jocul cu 15 constă în următoarele: într-o cutie cu 16 celule sînt aşezate într-o ordine arbitrară 15 piese numerotate (vezi, de exemplu, *I* în fig. 15); se cere să trecem la aşezarea normală *III* cu ajutorul unui număr de „mutări simple ale turnului de şah", constînd de fiecare dată în deplasarea spre o celulă goală a unei piese situate într-o celulă vecină.

De exemplu, deplasînd piesa 12 trecem de la *I* la *II*; apoi putem muta în locul gol piesa 10 sau 11 etc.

Vom denumi *permutări* diversele poziţii ale pieselor. Constatăm că unele permutări vor fi „de nerezolvat", adică de la ele nu se va putea trece la permutarea *III*.

Justificarea acestei propoziţii se bazează pe consideraţii foarte simple : vom conveni să spunem că două piese se află într-o *dezordine relativă* (formează o *inversiune*), dacă piesa cu număr mai mare se află înaintea celei cu număr mai mic ; de exemplu, permutarea *III* nu prezintă nici o inversiune, în permutarea *I* piesa 1 formează două inversiuni (cu 3 şi cu 9), piesa 2 mai formează două inversiuni cu aceleaşi piese, piesa 3 formează o singură inversiune cu 9 (inversiunile piesei 2 cu 3 şi a lui 3 cu 1 au fost luate în considerare anterior) etc.

Se constată uşor că permutarea *I* prezintă în total 49 de inversiuni.

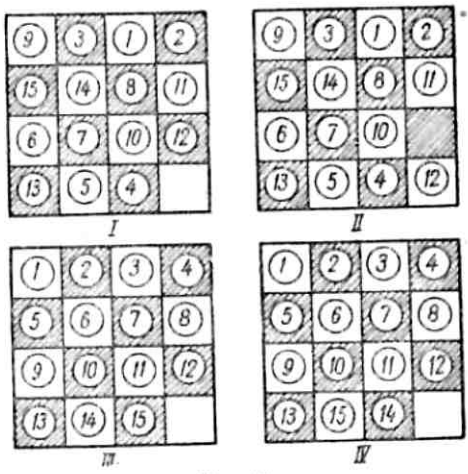


Fig. 15

Vom considera că în celula goală se află piesa 16 (fictivă) şi că deci fiecare mutare se reduce la o *transpoziţie* (schimbare de locuri) între piesa fictivă 16 şi una dintre piesele vecine cu ea.

În permutările *I*, *III*, *IV*, nici o piesă nu formează inversiuni cu piesa 16, pe cînd în permutarea *II* fiecare dintre piesele 13, 5, 4, 12 formează cîte o inversiune cu 16.

Permutările cu număr par de inversiuni (luînd în considerare şi piesa fictivă 16), de exemplu permutările *II* şi *III*, le vom denumi *pare* iar pe cele cu număr impar de inversiuni, cum sînt *I* şi *IV* le vom denumi *impare*.

În algebra superioară se demonstrează că transpoziţia a două elemente oarecare dintr-o permutare îi schimbă paritatea ; prin urmare, orice mutare în jocul 15, care este o transpoziţie cu 16 a uneia dintre celelalte piese schimbă paritatea permutării (vezi, de exemplu, trecerea de la *I* la *II*) ; este clar că un număr par de mutări va duce la o permutare de aceeaşi paritate cu cea iniţială, iar unul impar la o permutare de paritate opusă.

Dacă vom colora pentru comoditate cele 16 celule „ca pe o tablă de șah", atunci la fiecare mutare se va schimba culoarea celulei goale, deci va fi adevărată teorema de mai jos.

Teorema I. *Vor fi nerezolvabile, adică ireductibile la permutarea III, toate permutările impare cu celulă goală albă și toate permutările pare cu celulă goală neagră.*

În adevăr, de la o permutare impară cu celulă goală albă la o permutare cu celulă goală (tot albă), în colțul din dreapta jos, putem trece printr-un număr par de mutări, adică în acest caz putem ajunge numai la o permutare impară, deci nu vom putea realiza permutarea *III*. În mod analog se demonstrează că permutările pare cu celulă goală neagră sînt și ele irezolvabile.

Va fi de asemenea adevărată și următoarea teoremă mai generală :

Teorema II. *Dacă vom considera în jocul cu 15 că sînt admisibile nu numai mutările simple ale turnului, ci și transferul oricărei piese într-o celulă goală, precum și transpoziția a două piese oarecare, atunci nici o permutare impară nu poate fi adusă printr-un număr par de mutări la permutarea III și nici o permutare pară nu poate fi adusă printr-un număr impar de mutări la permutarea III.*

În adevăr, modificînd astfel regulile jocului, orice mutare fiind o transpoziție a două piese oarecare (una dintre ele poate fi și cea fictivă), schimbă tipul permutării (demonstrați !). Or, permutarea *III* la care trebuie să ajungem pînă la urmă este pară.

Deoarece în cazul mutării calului (ca și în cazul mutărilor simple ale turnului) se schimbă rînd pe rînd culoarea celulei goale, teorema I va fi valabilă și pentru jocul cu 15 astfel modificat, încît piesele să poată fi deplasate în celula goală numai prin săritura calului.

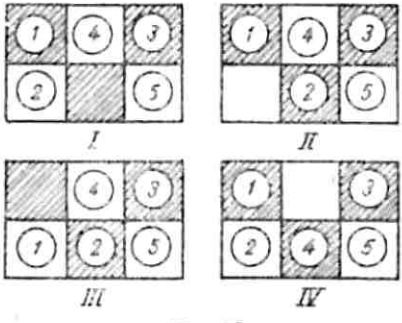


Fig. 16

Teorema III. *Orice permutare pară cu celulă goală albă și orice permutare impară cu celulă goală neagră sînt rezolvabile, adică reductibile la permutarea III. Celelalte permutări pot fi aduse la permutarea IV.*

Să studiem întîi deplasarea a cinci piese pe un dreptunghi format din șase celule. Dacă vom da atenție numai poziției relative a pieselor care parcurg dreptunghiul în sens orar (fără a ține seama de poziția celulei goale), atunci pozițiile *I, II, III* (fig. 16) ale pieselor pot fi caracterizate printr-o aceeași permutare 1 4 3 5 2 (sau, ceea ce este același lucru, prin permutările 4 3 5 2 1, 3 5 2 1 4 etc.).

Se vede ușor că orice mutare orizontală (să zicem mutarea care ne conduce de la *I* la *II*) și mutările verticale din coloanele extreme (de exemplu, mutarea care ne trece din *II* în *III*) nu schimbă poziția relativă a pieselor, pe cînd orice mutare în coloana din mijloc (de exemplu, mutarea piesei 4 în poziția *I*, care ne conduce la *IV*) schimbă poziția relativă a pieselor, permutarea 1 3 5 4 2, prin care se caracterizează noua poziție, obținîndu-se din permutarea precedentă prin deplasarea numărului corespunzător cu doi pași: 1 3 5 4 2. Folosind acest fapt, este ușor să așezăm alături una de alta, trei piese (de exemplu, 1, 2 și 3) în ordinea crescătoare a numerelor lor; astfel, plecînd de la permutarea 1 4 3 5 2, după ce deplasăm inițial piesa 2, iar apoi piesa 4 în coloana din mijloc (posibilitatea acestor mutări trebuie creată prin deplasarea circulară prealabilă a pieselor), ajungem la permutarea 1 2 3 4 5 (pentru o altă poziție inițială am putea obține 1 2 3 5 4).

În conformitate cu ceea ce am demonstrat, ordonarea pieselor pornind de la orice poziție inițială se poate realiza, bunăoară, în felul următor (care nu ne dă însă, în general, soluția cea mai rapidă):

1) începem prin a face în așa fel încît în dreptunghiul „1, 2, 5, 6, 9, 10" (aici numerele de ordine ale celor șase celule care formează dreptunghiul sînt indicate în conformitate cu permutarea normală *III*) să se afle piesele 1, 2 și alte trei piese, iar o celulă să fie goală;

2) să deplasăm piesele 1 și 2 pe locurile corespunzătoare;

3) procedînd analog, să dispunem consecutiv în locurile lor piesele:

3 și 4, operînd în dreptunghiul „3, 4, 7, 8, 11, 12",
5 și 6, „ „ „ „5, 6, 9, 10, 13, 14",
7 și 8, „ „ „ „7, 8, 11, 12, 15, 16".
9 și 13, „ „ „ „9, 10, 11, 13, 14, 15";

4) în interiorul dreptunghiului „10, 11, 12, 14, 15, 16" se vor afla piesele 10, 11, 12, 14 și 15, dintre care trei, anume 10, 11 și 12, pot fi mutate pe locurile lor, ceea ce ne va conduce fie la permutarea *III* (fig. 15), dacă permutarea inițială satisfăcea condițiile din teorema *III*, fie la permutarea *IV*.

Putem modifica întrucîtva jocul cu 15, luînd piese pe care sînt notate litere formînd în ansamblu o anumită frază. Dacă, în aceste condiții, o literă va figura de două ori, iar celelalte cîte o singură dată, atunci, oricare ar fi poziția inițială a pieselor, ele pot fi aduse printr-un anumit număr de mutări la poziția „corectă".

Să luăm, de exemplu, fraza „și eu să cînt rapid", asociind literelor

ș	e	u	s	ă	c	î	n	t	r	a	p	d
1,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	15

și distribuind numerele 2 și 14 într-un anumit fel între literele *u*, vom obține, oricare ar fi poziția inițială a pieselor pe tablă, două

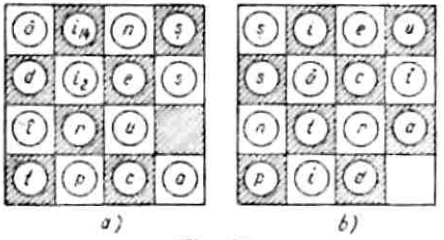


Fig. 17

permutări de tipuri diferite, deoarece ele trec una în cealaltă printr-o singură transpoziție. Prin urmare, o permutare va fi neapărat rezolvabilă.

Dacă, de exemplu, litera *u* de sus din fig. 17 ar fi asociată cu 12, iar cea de jos cu 14, am obține o permutare de tip par (44 de inversiuni), iar repartizînd numerele în ordine inversă, decît cea din figură, am obține o permutare impară (47 de inversiuni).

Deoarece celula goală din poziția (*a*) este neagră, rezultă că pentru a ajunge la poziția *b* trebuie neapărat ca litera *u* din partea de sus să fie mutată în celula a 14-a, iar cea de jos în celula a 10-a.

Toate cele spuse despre jocul cu 15 rămîn valabile și pentru „jocul cu 9" unde opt piese se deplasează într-un pătrat cu nouă celule.

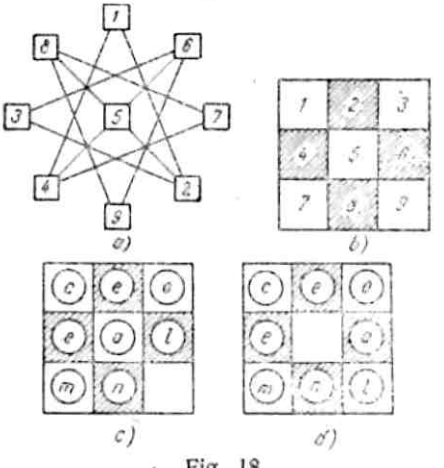


Fig. 18

Să studiem interesanta variantă a jocului cu 9, denumită „cameleonul". Jocul se face pe o „tablă" cu nouă celule unite între ele prin segmente de dreaptă (fig. 18, *a*). Pe cele opt piese sînt scrise cîte o literă din cuvîntul „cameleon", iar piesele sînt așezate la întîmplare în opt celule ale tablei.

Deplasînd piesele după segmentele de legătură, trebuie să le dispunem în așa fel încît citind în sensul mișcării acelor de ceasornic, începînd cu celula 1, să obținem cuvîntul „cameleon".

Numerotînd celulele „tablei" după cum se arată în fig. 18, *a*, ne convingem ușor că orice pereche de celule va fi unită printr-un segment de dreaptă, dacă și numai dacă celulele avînd aceleași numere în pătratul *b*) vor fi legate între ele printr-o mutare simplă a turnului de șah.

Deoarece cuvîntul „cameleon" cuprinde două litere *e* identice, iar celelalte apar cîte o singură dată, (la fel cum în fraza noastră de mai sus am avut litera *i* dublă), rezultă, conform celor arătate mai sus, că oricare ar fi poziția inițială a pieselor în pătratul *b*), ele pot fi aduse la poziția *c*), deci și la *d*), ceea ce corespunde cu soluționarea jocului (comparați cu *a*).

Jocurile descrise în paragraful de față sînt jocuri de o singură persoană. Dar și mai multe persoane se pot întrece în a găsi cele mai scurte căi pentru a trece de la o poziție aleasă la alta.

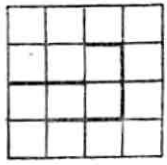


Fig. 19

Pentru a complica jocul cu 15 putem interzice anumite mutări, de exemplu, se poate demonstra (încercați) ([38]) că „barierele" reprezentate în fig. 19 nu împiedică trecerea de la orice poziție inițială la pozițiile *III* sau *IV* (fig. 15).

Încercați să studiați următoarea problemă : va fi oare adevărată teorema III, demonstrată mai sus, dacă mutările simple ale turnului vor fi înlocuite prin săritura calului ? Problema analogă se poate pune și pentru o tablă pătrată cu 36 de celule și cu 35 de piese numerotate, înlocuind calul de șah obișnuit printr-un „cal *sau* 2, 3", la care, în fiecare mutare o coordonată variază cu două unități, iar cealălaltă cu trei unități.

§ 15. PROBLEME DE DETERMINARE A NUMĂRULUI DE METODE PENTRU ATINGEREA UNUI SCOP

Probleme cu sărituri

I) *În cîte moduri poate un săritor care stă în fața unor celule desenate pe pămînt (fig. 20) să ajungă la celula nr.* n, *dacă el sare de la stînga spre dreapta, atingînd pămîntul numai în interiorul celulelor marcate, iar lungimea salturilor poate fi arbitrară ?*

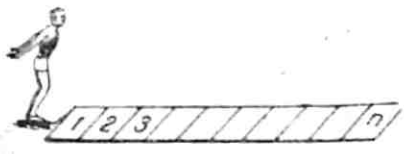


Fig. 20

Să notăm cu u_s numărul de moduri prin care se poate ajunge în celula nr. *s*. Pentru soluționarea problemei trebuie să ținem seama că săritorul are posibilitatea (una singură) de a sări în celula a *n*-a, fără să atingă pămîntul în nici o celulă intermediară. Dacă el sare întîi prin k celule intermediare, el o poate face în C_{n-1}^{k} moduri. Prin urmare,

$$u_n = 1 + C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{2} + \cdots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}. \qquad (1)$$

Observaţia 1. Evident, am găsit cu acest prilej numărul diverselor reprezentări ale numărului n sub forma unei sume de termeni pozitivi întregi (inclusiv cazul „sumei" formate dintr-un singur termen), două reprezentări fiind considerate distincte dacă diferă fie prin natura termenilor, fie prin ordinea lor.

Observaţia 2. Dacă săritorul are voie să atingă pămîntul numai de un număr par de ori, atunci el va dispune de $1+C_{n-1}^{2}+C_{n-1}^{4}+\cdots$ adică de 2^{n-2} moduri.

II) *În cîte moduri poate un săritor să ajungă în celula a n-a dacă are voie să efectueze numai salturi simple (pînă în celula vecină) şi duble (sărind din două în două)?*

Să notăm cu v_s numărul de moduri prin care se poate ajunge în celula nr. s. Deoarece săritorul poate ajunge în celula s numai din celulele cu numere s-1 şi s-2, iar pentru a ajunge aici el dispune respectiv de v_{s-1} şi de v_{s-2} moduri, rezultă că, pentru $s>2$, are loc egalitatea

$$v_s=v_{s-1}+v_{s-2}. \tag{2}$$

Ne convingem uşor că

$$v_1=1 \text{ şi } v_2=2. \tag{3}$$

Plecînd de la (3), putem determina consecutiv cu ajutorul relaţiei (2) valorile lui v_3, v_4, v_5,..., adică să scriem soluţia problemei sub forma tabelei

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
v_s	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

(4)

Ecuaţia (2) este un caz particular al ecuaţiilor denumite *cu diferenţe finite:*

$$v_{x+m}=F\,(v_x, v_{x+1},\ldots,\ v_{x+m-1}), \tag{5}$$

care se studiază în calculul cu diferenţe finite.

Fiind cunoscute valorile lui $v_0, v_1, v_2,\ldots,\ v_{m-1}$, este uşor să găsim consecutiv cu ajutorul egalităţii (5), care este şi ea o relaţie de *recurenţă* pentru funcţia v_x, valorile lui v_m, v_{m+1}, v_{m+2},..., adică să obţinem soluţia ecuaţiei (5) cu ajutorul unei tabele. Ar fi însă incomod să căutăm pe această cale, de exemplu, pe v_{1000} astfel că de obicei căutăm să reprezentăm soluţia sub forma $v_x=f(x)$.

Ne convingem uşor ([39]) că ecuaţiile (2) şi (3) sînt satisfăcute de funcţia

$$v_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]. \tag{6}$$

Calculînd cu ajutorul ei valorile lui v_3, v_4, v_5,..., vom obține aceleași numere ca în tabela (4) (verificați !).

Observația 3. La rezolvarea ecuației (2) ne conduce și „problema iepurilor de casă" a lui Leonardo Fibonacci din care cauză numerele (4) se numesc *numerele lui Fibonacci*. Ele au o serie de proprietăți interesante. Menționăm aici numai legătura lor cu coeficienții binomului lui Newton. Din soluția celei de-a doua probleme cu săritorul rezultă că v_m este egal cu numărul diverselor reprezentări ale numărului natural n sub forma unei sume în care fiecare termen este egal cu 1 sau cu 2, două reprezentări considerîndu-se distincte și în cazul cînd diferă numai prin ordinea termenilor. Pe de altă parte, numărul de reprezentări în care 2 figurează de k ori $\left(0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ este egal cu C_{n-k}^{k}, deoarece în acest caz numărul total de termeni va fi $n-k$, iar din $n-k$ locuri se pot alege k locuri ocupate de 2 în C_{n-k}^{k} moduri. Prin urmare:

$$v_n = 1 + C_{n-1}^{1} + C_{n-2}^{2} + \cdots + C_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \tag{7}$$

Observația 4. În prima problemă cu săritorul am fi putut stabili relația:

$$u_s = 1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{s-1}, \tag{8}$$

de unde ajungem ușor (pentru $u_1 = 1$) la egalitatea $u_n = 2^{n-1}$.

Observația 5. În problema cu săritorul putem varia condițiile după cum vrem: de exemplu, putem să admitem în general salturile simple, duble și triple, făcînd însă restricția că din celulele ale căror numere de ordine sînt multipli de cinci (inclusiv din poziția inițială) se pot face numai salturi simple (teren alunecos).

În aceste condiții, să notăm cu w_s numărul de moduri în care se poate ajunge la celula nr. s; atunci în locul unei singure ecuații vom avea sistemul:

$$\begin{aligned}
w_s &= w_{s-1} + w_{s-2} + w_{s-3} && \text{pentru } s = 5k \text{ și pentru } s = 5k \pm 1,\\
w_s &= w_{s-1} + w_{s-3} && \text{pentru } s = 5k + 2,\\
w_s &= w_{s-1} + w_{s-2} && \text{pentru } s = 5k + 3;
\end{aligned}$$

unde $w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $w_3 = 2$.

Încercați ([40]) să vă convingeți, scriind tabela valorilor lui w_s, că în acest caz săritorul poate ajunge la celula a 15-a în 1 619 moduri.

Trecem acum la probleme în care funcția căutată depinde de două sau mai multe argumente care sînt numere întregi.

Problema turnului

În cîte moduri (cu cel mai mic număr de mutări) putem trece un turn de pe cîmpul (0, 0) în cîmpul (m, n) dacă îl deplasăm prin mutări simple, adică mutări în care turnul trece în cîmpul vecin pe orizontală sau pe verticală ?

Numerele dintre paranteze marchează respectiv numărul coloanei și numărul liniei la intersecția cărora se află cîmpul; coloanei din stînga și liniei de jos li se atribuie numărul 0 (m și n sînt întregi nenegativi).

Să notăm cu $u_{x,y}$ numărul de moduri prin care se poate trece din cîmpul (0, 0) în cîmpul (x, y). Evident, oricare ar fi numerele pozitive x și y, avem

$$u_{x,0}=1 \text{ și } u_{0,y}=1. \tag{9}$$

Deoarece, pentru $x>0$ și $y>0$, turnul poate ajunge în cîmpul (x, y), fie din cîmpul (x-1, y), fie din cîmpul (x, y-1), în care el poate ajunge, respectiv, în $u_{x-1,y}$ și $u_{x,y-1}$ moduri, rezultă că

$$u_{x,y}=u_{x-1,y}+u_{x,y-1}. \tag{10}$$

Am obținut o relație de recurență pentru funcția $u_{x,y}$, care depinde de două argumente întregi (iar în problema noastră și nenegative).

Dacă vom scrie în fiecare cîmp al tablei de șah valoarea lui $u_{x,y}$ care îi corespunde, atunci, în virtutea relațiilor (9) și (10), toate cîmpurile din coloana din stînga și din linia de jos vor putea fi completate imediat cu cifra 1, iar apoi (vezi 10) vom putea completa treptat celelalte cîmpuri, scriind în ele numere egale cu suma a două numere vecine (de jos și din stînga). Tabela reprezintă soluția ecuației (10) în condițiile (9) (vezi fig. 21).

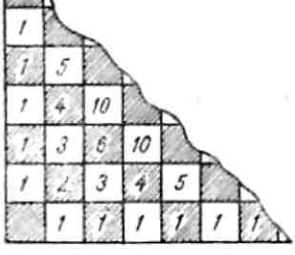


Fig. 21

Problema turnului poate fi rezolvată mai simplu, ceea ce ne va da totodată soluția ecuației (10), prezentată printr-o formulă comodă.

Remarcăm că pentru a trece turnul din cîmpul (0, 0) în cîmpul (m, n) sînt necesare în total $m+n$ mutări; m pe orizontală și n pe verticală. Fiecare mod de a deplasa turnul poate fi caracterizat printr-o schemă formată din literele o și v, care ne arată în ce ordine trebuie să efectuăm mutările orizontale și pe cele verticale.

Evident, pentru a alege cele m locuri ocupate de litera o (dintre cele $m+n$ locuri existente în schemă), avem în total $C_{m+n}^{m} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$ posibilități distincte, ceea ce ne dă soluția problemei turnului de șah. Soluția ecuației (10) în condițiile (9) va fi funcția

$$u_{x,y} = \frac{(x+y)!}{x!\,y!}. \tag{11}$$

Problema păianjenului

În cîte moduri poate un păianjen aflat în originea coordonatelor să treacă (pe drumul cel mai scurt !) în nodul k, l, m al unei rețele spațiale ? (Într-o rețea spațială orice nod, adică orice punct cu coordonate întregi, este legat cu mici bare paralele cu axele de coordonate de cele șase noduri vecine). Această problemă este o generalizare naturală a problemei turnului.

Dacă vom nota cu $u_{x,y,z}$ numărul de moduri prin care se poate ajunge în nodul (x, y, z), atunci pentru valori naturale ale numerelor x, y, z, vom avea

$$u_{x,y,z} = u_{x-1,y,z} + u_{x,y-1,z} + u_{x,y,z-1}. \tag{12}$$

Pe lîngă această ecuație cu diferențe, care cuprinde o funcție necunoscută depinzînd de trei argumente întregi, mai avem și condițiile

$$u_{x,y,0} = \frac{(x+y)!}{x!\,y!};\quad u_{x,0,z} = \frac{(x+z)!}{x!\,z!};\quad u_{0,y,z} = \frac{(y+z)!}{y!\,z!}, \tag{13}$$

care rezultă din soluția problemei precedente.

Orice mod concret prin care păianjenul poate trece din nodul (0, 0, 0) în nodul (k, l, m) poate fi caracterizat prin șirul de litere x, y, z, care arată în ce ordine se succed deplasările păianjenului după direcțiile axelor Ox, Oy, Oz; de aceea, $u_{k,l,m}$ va fi egal cu numărul de moduri în care putem completa $k+l+m$ locuri, cu k litere „x", cu l litere „y" și cu n litere „z".

Dintre cele $k+l+m$ locuri de care dispunem, putem alege k locuri pentru a le umple cu litera „x" în $\frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!}$ noduri; fiecăruia din aceste moduri îi corespund $\frac{(l+m)!}{l!\,m!}$ posibilități de a

alege l locuri (dintre cele $l+m$ rămase libere) pentru a le completa cu litera „y". Prin urmare, numărul total de posibilități de a alege k locuri în schemă (pentru a le umple cu litera „x") și l locuri (pentru a le umple cu litera „y") este

$$\frac{(k+l+m)!}{k!\,(l+m)!}\cdot\frac{(l+m)!}{l!\,m!}=\frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!}.$$

Așadar, soluția ecuației (12) în condițiile limită (13) va fi funcția

$$u_{x,y,z}=\frac{(x+y+z)!}{x!\,y!\,z!}$$

Probleme multidimensionale

Problema păianjenului poate fi generalizată pentru o rețea cvadridimensională, ale cărei noduri se obțin din nodurile rețelei tridimensionale, deplasînd-o cu una, cu două, cu trei etc. unități de lungime în direcția celei de-a „patra axe" Ou. Nu este necesar să orientăm axa Ou perpendicular pe axele Ox, Oy, Oz, căci pentru aceasta ar trebui „să ieșim în spațiul cvadridimensional", ci este suficient să ne închipuim o serie de rețele tridimensionale, ale căror noduri sînt unite prin mici bare „unitare", adică egale cu unitatea, și „paralele" cu axa Ou.

Pentru rețelele tridimensionale cu număr finit de noduri aceasta se poate realiza sub forma unui model, unind efectiv prin „sîrme unitare" nodurile corespunzătoare ale rețelelor tridimensionale de ordinul „zero", de ordinul întîi, al doilea etc.

Într-o astfel de rețea cvadridimensională, fiecare nod va fi caracterizat prin patru numere întregi (coordonatele sale).

Păstrînd terminologia geometrică, un ansamblu de m numere $a_1, a_2, \ldots, a_m$ este considerat adesea ca reprezentînd coordonatele unui punct în „spațiul m dimensional".

Dacă vom admite că numerele $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sînt întregi și nenegative și vom considera ca vecine nodurile în care numai una dintre coordonate diferă cu o unitate, pe cînd toate celelalte coordonate sînt egale, atunci pentru $a_1+a_2+\ldots+a_m=n$, trecerea de la nodul $0(0, 0, \ldots, 0)$ la nodul $A\ (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ se poate efectua în n mutări (trecînd de fiecare dată în cîte un nod vecin).

Dacă mutările în cadrul cărora crește numai prima coordonată sau numai a doua coordonată etc. vor fi notate respectiv cu literele x_1, x_2 etc., atunci numărul de moduri pentru a trece prin n mutări din nodul $0(0, 0, \ldots, 0)$ în nodul $A\ (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ va fi egal cu numărul de „permutări cu repetiție" care se pot face cu n elemente:

$$\underbrace{x_1\ x_1, \ldots, x_1}_{a_1\text{ elemente}};\ \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{a_2\text{ elemente}};\ \ldots;\ \underbrace{x_m, x_m, \ldots, x_m}_{a_m\text{ elemente}}.$$

Repetînd raționamentul din problema păianjenului, arătați că acest număr este egal cu $\frac{n!}{a_1!\,a_2!\ldots a_m!}$ (41).

Ca exemplu de problemă multidimensională poate servi problema umplerii cu apă a unor butoaie: butoaiele cu numerele de ordine 1, 2,..., $m-1$, m au respectiv capacitățile a_1, $a_2 \ldots a_{m-1}$, a_m căldări; în cîte moduri puteți umple toate butoaiele dacă trebuie respectată condiția că apa dintr-o căldare plină se toarnă în întregime într-unul din butoaie?

Acest număr este evident egal cu $\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_m)!}{a_1!\,a_2!\ldots a_m!}$.

Problema regelui

În cîte moduri poate să treacă regele din cîmpul (0, 0) în cîmpul (k, l), *dacă el se va muta în sensul creșterii uneia sau a ambelor coordonate („mutare diagonală")?*

Să notăm cu $w_{k,l}$ numărul căutat. Dacă în deplasările sale, regele va efectua s mutări diagonale (evident, $s \leqslant k$, $s \leqslant l$) atunci numărul de mutări orizontale va fi egal cu $k-s$, cel de mutări verticale cu $l-s$, iar numărul total de mutări va fi $k+l-s$. Deplasările regelui în cazul a s mutări diagonale pot fi caracterizate prin $\frac{(k+l-s)!}{(k-s)!\,(l-s)!\,s!}$ moduri (verificați, calculînd în cîte moduri pot fi dispuse $k-s$ litere o, $l-s$ litere v și s litere d). Prin urmare, pentru $k \leqslant l$, avem

$$w_{k,l} = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} + \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!\,(l-1)!\,1!} + \ldots + \frac{l!}{0!\,(l-k)!\,k!}, \qquad (14)$$

unde primul termen reprezintă numărul de moduri prin care se poate ajunge la cîmpul (k, l) fără mutări diagonale, al doilea termen reprezintă numărul de moduri cuprinzînd o singură mutare diagonală etc.

Recomandăm cititorului să întocmească tabela valorilor funcției $w_{x,y}$, folosind egalitatea evidentă

$$w_{x,y} = w_{x,y-1} + w_{x-1,y} + w_{x-1,y-1} \qquad (15)$$

și condiția

$$w_{x,0} = w_{0,y} = 1, \qquad (16)$$

completînd cu valorile ei cîmpurile tablei de șah și să confrunte rezultatele cu valorile calculate după formula (14).

Modificînd întrucîtva enunțul problemei, putem căuta numărul de moduri pentru a-l deplasa pe rege dintr-un cîmp concret (de exemplu, din cîmpul *e*2) într-un alt cîmp al tablei de șah, prin numărul minim de mutări.

Să împărțim tabla în zone constînd din cîmpurile la care regele poate ajunge printr-o singură mutare, prin cîte două mutări etc. (fig. 22). Să presupunem că, de exemplu, pentru toate cîmpurile din primele trei zone soluțiile sînt cunoscute (vezi numerele care figurează în cîmpurile acestor zone).

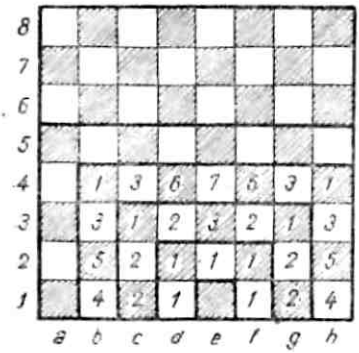


Fig. 22

Deoarece în cîmpul *f*5 din zona a patra se poate ajunge numai din cîmpurile *e*4, *f*4, *g*4, ale zonei a treia, iar în aceste cîmpuri se poate ajunge respectiv în șapte, în șase și în trei moduri, înseamnă că regele poate ajunge în cîmpul *f*5 în 16 moduri (7+6+3).

Evident, la cîmpul *g*5 se poate ajunge în 10 moduri (3+6+1) la cîmpul *h*5 în patru moduri (3+1) etc.

Completînd succesiv cîmpurile zonelor a patra, a cincea etc., ne convingem ușor, bunăoară, că regele dispune de 12, 20, 266 și 357 moduri pentru a ajunge respectiv în cîmpurile *a*2, *a*7, *c*8, *d*8.

Probleme diverse

Există o serie de probleme analoge în care este greu sau imposibil să scriem o ecuație cu diferențe finite pentru funcția căutată. Aceasta va fi situația, de exemplu, dacă vom considera calul în locul regelui, sau dacă în problema turnului și a păianjenului vom interzice anumite mutări, punînd bariere pe tablă sau suprimînd anumite bare ale rețelei spațiale.

În problemele de acest gen, zonele avînd toate celulele accesibile în k mutări (k=1, 2, 3,...) pot avea o formă foarte originală, din care cauză este comod ca diversele celule ale zonelor să fie ori numerotate, ori colorate diferit. Bineînțeles, în aceste condiții, înainte de a determina zona $k+1$ trebuie să evidențiem toate celulele zonei k.

În figura 23 sînt marcate pe o tablă de șah infinită cu cifre mari cîmpurile aparținînd primelor două zone în problema calului, iar cu cifre mici se marchează în cîte moduri poate calul să ajungă din cîmpul A în fiecare cîmp al acestor zone.

Evident, cîmpurile necompletate la care se poate ajunge prin săritura calului cel puțin dintr-una din celulele zonei a doua vor

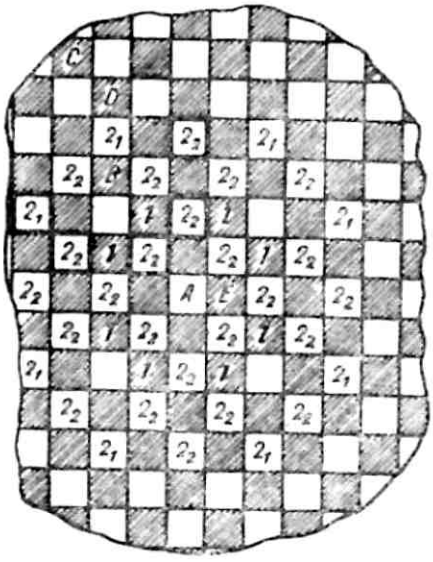


Fig. 23

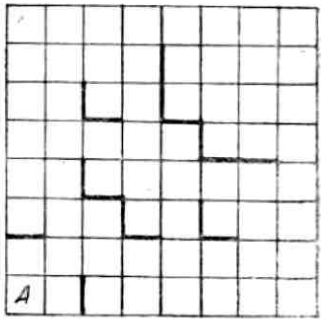


Fig. 24

aparține zonei a treia. De exemplu, celula B aparține zonei a treia și deoarece ea este legată prin mutarea calului pe cinci cîmpuri ale zonei a doua (cele însemnate cu un chenar), rezultă că din cîmpul A calul poate să ajungă în cîmpul B în nouă moduri $(1+2+2+2+2)$.

În mod analog, găsim că la cîmpurile C, D și E ale zonei a treia, calul poate să ajungă în 1, 6 și 12 moduri.

Convingeți-vă singuri că în cazul existenței unor bariere ca cele din fig. 24, zona a 12-a în problema turnului care pornește din A este formată din 14 cîmpuri, turnul putînd avea acces la fiecare dintre ele în opt moduri ([42]).

Probleme analoge se pot pune și în cazul regelui sau al păianjenului, mulțimea de mutări interzise putînd fi aleasă în diferite feluri. Putem urmări, în aceste condiții, ca „zona k" să aibă o anumită formă cu sens.

Ne convingem ușor că în problema calului zonele a cincea, a șasea etc. au o formă destul de regulată, iar pentru $k \geqslant 5$ vom avea, pentru numărul N_k de cîmpuri ale zonei k, formula $N_k = 120 + 28\,(n-5)$.

Încercați să reflectați la următoarele probleme:

1) În cîte moduri poate regele, pe o tablă de șah infinită, să ajungă prin patru mutări în zona a patra? ([43])

2) În cîte moduri, doi (trei, patru) pioni aflați în prima linie a unei table de șah pot să ajungă pînă în linia a opta? ([44]). Avem în vedere diversele moduri de alternare a mutărilor efectuate de diverși pioni, precum și dreptul fiecăruia dintre ei de a uza de mutare dublă la prima mutare, sau de a renunța la ea.

3) Ați reușit oare să găsiți soluția generală a problemei calului, adică să determinați (cel puțin pentru $k \geqslant 5$) numărul de moduri pentru a ajunge în diversele cîmpuri ale unei table de șah infinite în funcție de poziția pe care o ocupă acestea?

O problemă analogă se poate pune și pentru diversele valori ale lui p și q în cazul „calului $p \cdot q$", la mutarea căruia una dintre coordonate variază cu p unități, iar a doua cu q unități.

§ 16. PĂTRATE MAGICE

Vom denumi *pătrat magic de ordinul n* un pătrat împărțit în n^2 celule completate cu primele n^2 numere naturale, în așa fel încît toate sumele numerelor pe orizontalele, pe verticalele și pe diagonalele pătratului să fie egale cu același număr $s_n = \frac{n(n^2+1)}{2}$. Dacă sînt egale numai sumele pe orice orizontală sau verticală vom spune că pătratul este *semimagic*. În fig. 25 este reprodus pătratul magic denumit *pătratul lui Dürer*, după numele matematicianului și pictorului din secolul al XVI-lea, care l-a zugrăvit pe celebrul său tablou „Melancolia"; cele două numere din mijloc ale rîndului de jos din acest pătrat formează numărul 1514, anul cînd a fost pictat tabloul.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

a)

6	7	2
1	5	9
8	3	4

b)

2	7	6
9	5	1
4	3	8

c)

Fig. 25

Este destul de ușor să rezolvăm complet problema pătratelor magice pentru $n=3$. În adevăr, $s_3 = \frac{3(3^2+1)}{2} = 15$ și există numai opt moduri de a reprezenta numărul 15 sub forma unei sume de numere diferite (de la 1 pînă la 9):

$$15 = 1+5+9 = 1+6+8 = 2+4+9 = 2+5+8 = 2+6+7 = 3+4+8 = 3+5+7 = 4+5+6.$$

Remarcăm că fiecare dintre numerele 1, 3, 7, 9 intervine în cîte două dintre sumele indicate, fiecare dintre numerele 2, 4, 6, 8 în cîte trei, iar 5 intervine în patru dintre ele. Pe de altă parte, dintre cele 8 linii de cîte trei celule: trei orizontale, trei verticale și două diagonale prin fiecare celulă unghiulară a pătratului trec cîte

trei linii, prin celula centrală cîte patru, iar prin fiecare dintre celelalte celule cîte două. Prin urmare, numărul 5 trebuie neapărat să stea în celula centrală, numerele 4, 6, 8, în celulele unghiulare iar numerele 1, 3, 7, 9 în celelalte celule ale pătratului.

Deoarece numerele 2, 4, 6 și 8 pot fi dispuse numai în opt moduri în celulele din colțurile pătratului, astfel încît fiecare sumă diagonală să fie egală cu 15, iar așezarea acestor numere determină complet poziția numerelor 1, 3, 7, 9, putem afirma că există numai opt pătrate magice de cîte nouă celule. Două dintre ele, care sînt unul simetric celuilalt, se văd în fig. 25, *b*, *c*; celelalte șase se pot obține din aceste pătrate rotindu-le cu 90°, 180°, 270° în jurul centrului. O dată cu creșterea lui n, numărul N de pătrate distincte cu n^2 celule crește repede și, deși nu s-a găsit pînă acum formula generală care să exprime dependența lui N de n, se știe, de exemplu, că există 880 de pătrate magice distincte cu cîte 16 celule și că pentru $n=7$, numărul de pătrate magice este de ordinul sutelor de milioane.

Pentru alcătuirea pătratelor magice cu număr impar de celule există o serie de metode propuse de diferiți autori. Una dintre cele mai elegante metode este așa-numita *metodă a teraselor* propusă de Bachet: cele n^2 numere se scriu succesiv (vezi fig. 26, unde $n=5$) în n linii paralele cu una dintre diagonalele pătratului; în fiecare linie cîte n numere, cel din mijloc trebuind să figureze în centrul pătratului. Îi lăsăm cititorului să demonstreze că o translație a tuturor părților (teraselor) care ies din pătratul principal, astfel încît să ajungă în partea opusă din interiorul lui, conduce la un pătrat magic.

Fig. 26

Folosind simetria și rotațiile de 90°, 180° și 270°, putem obține din fiecare „pătrat a lui Bachet" alte șapte pătrate magice distincte.

Pentru alcătuirea de pătrate magice cu număr par de celule există un procedeu comod, propus de Ball.

Vom denumi, pentru a ne exprima mai scurt, transpoziție *orizontală*, *verticală* și *centrală* (și le vom nota cu (α, β), (α, γ), (α, δ) operațiile în care își schimbă locurile numerele α și β, α și γ, α și δ, respectiv simetrice în raport cu dreptele BB', AA' și cu centrul pătratului (fig. 27, *a*).

Ne convingem ușor că cele două transpoziții centrale (α, δ) și (β, γ) în care numerele α, β, γ, δ (situate în părți opuse ale drept-

unghiului, pentru care dreptele AA' și BB' sînt axe simetrice) își schimbă locurile, sînt echivalente cu cele două transpoziții orizontale (α, β) și (γ, δ) și cu cele două transpoziții verticale (α, γ) și (β, δ) efectuate una după alta.

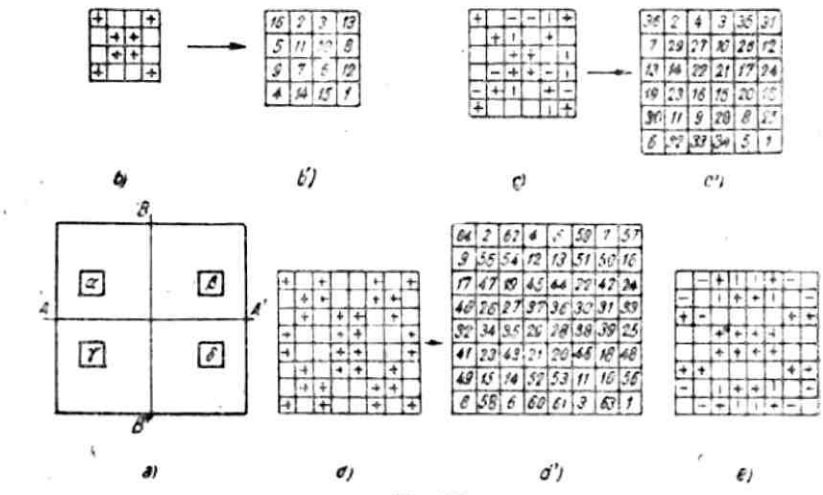


Fig. 27

Dacă vom completa un pătrat cu $(2m)^2$ celule cu numerele naturale de la 1 pînă la $4m^2$ inclusiv, scriindu-le în ordinea lor naturală, (completînd de la stînga spre dreapta întîi prima linie de sus, apoi a doua, a treia etc.), se demonstrează ușor că :

1) ambele diagonale vor satisface condiția de a fi magice, adică sumele numerelor din fiecare diagonală vor fi egale cu $m\ (4m^2+1)$;

2) două linii verticale (orizontale) arbitrare, simetrice în raport cu dreapta BB' (AA'), vor satisface condiția de a fi magice, dacă vom efectua în ele m transpoziții orizontale (verticale) anumite.

Esența metodei lui *Ball* constă în alegerea unor transpoziții, după efectuarea cărora toate liniile și coloanele satisfac condiția de a fi magice, iar elementele fiecărei diagonale rămîn (schimbîndu-și eventual locurile între ele) pe aceeași diagonală.

Să convenim ca prin liniile orizontale (verticale) din celulele simetrice în raport cu BB' (AA') să indicăm transpozițiile orizontale (verticale) la care trebuie supuse numerele respective, iar prin plusurile din vîrfurile dreptunghiului avînd centrul în centrul pătratului să marcăm cele două transpoziții diagonale ale numerelor care figurează în vîrfurile dreptunghiului (după cum s-a arătat mai sus, ele țin locul a două transpoziții orizontale și a două verticale, efectuate consecutiv).

În fig. 27, *b*, *c*, *d* sînt indicate schematic (pentru $m=2, 3, 4$) operațiile după efectuarea cărora „pătratele 4 m²" corespunzătoare, completate în mod „natural" (ele nu sînt reprezentate în figură) se transformă în pătratele *b'*), *c'*), *d'*).

Deoarece, în aceste condiții, numerele din fiecare diagonală rămîn pe aceeași diagonală, iar m numere din orice linie orizontală și verticală își schimbă locurile cu numerele corespunzătoare din linia simetrică, rezultă că pătratele *b'*), *c'*) și *d'*) vor fi magice.

Îl sfătuim pe cititor să se convingă pe exemple că găsirea schemelor operațiilor care duc la pătrate magice nu prezintă dificultăți prea mari și că atunci cînd m este dat, acest lucru se poate face, în general, în mai multe feluri.

Trebuie menționat că atunci cînd m este par, alcătuirea unei scheme pentru trecerea de la un pătrat completat natural la un pătrat magic este mai simplă decît pentru m impar, deoarece, în acest caz, în schemă trebuie să intervină inevitabil linioare orizontale și verticale, în afară de plusuri.

Pentru m par, schema poate fi constituită numai din plusuri (vezi, de exemplu, schema *d*), ceea ce, de altfel, nu este o condiție obligatorie, după cum rezultă, bunăoară, din schema *e*).

Să extindem întrucîtva noțiunea de „pătrat magic de ordinul n" considerînd că celulele pot fi completate cu numerele de la $k+1$ pînă la $k+n^2$.

Putem căuta pătrate magice care să satisfacă diverse condiții suplimentare. De exemplu, încă în **1544**, Stiefel a construit un pătrat magic de ordinul 7, care se transformă prin eliminarea tuturor celulelor periferice într-un pătrat magic de ordinul 5, completat

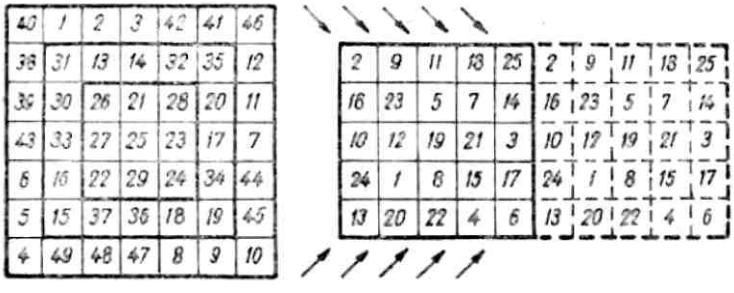


Fig. 28

cu numerele naturale de la 13 pînă la 37, și care se transformă pe aceeași cale într-un pătrat magic de ordinul 3 completat cu numerele de la 21 pînă la 29 (fig. 28, *a*).

În fig. 28, *b* este reprezentat un pătrat *supramagic*, adică un pătrat magic care are următoarea proprietate: adăugîndu-i-se în dreapta un al doilea pătrat identic, sumele tuturor „direcțiilor diagonale" vor fi egale.

Putem construi un pătrat magic de ordinul 9 care se descompune în 9 pătrate magice de cîte 9 celule.

Analog cu pătratele magice, putem construi cuburi magice de ordinul n, în ale căror celule primele n^3 numere (sau numerele de la $k+1$ pînă la $k+n^3$) să fie astfel așezate încît sumele numerelor dispuse în oricare dintre cele prime $3n^2$ linii paralele cu orice muchie a cubului și sumele din orice diagonală a cubului să fie identice.

Putem introduce noțiunea de dreptunghi magic, în care avem sume egale în „direcție diagonală" și pe liniile scurte, care diferă de sumele egale ale numerelor dispuse în liniile lungi ale dreptunghiului.

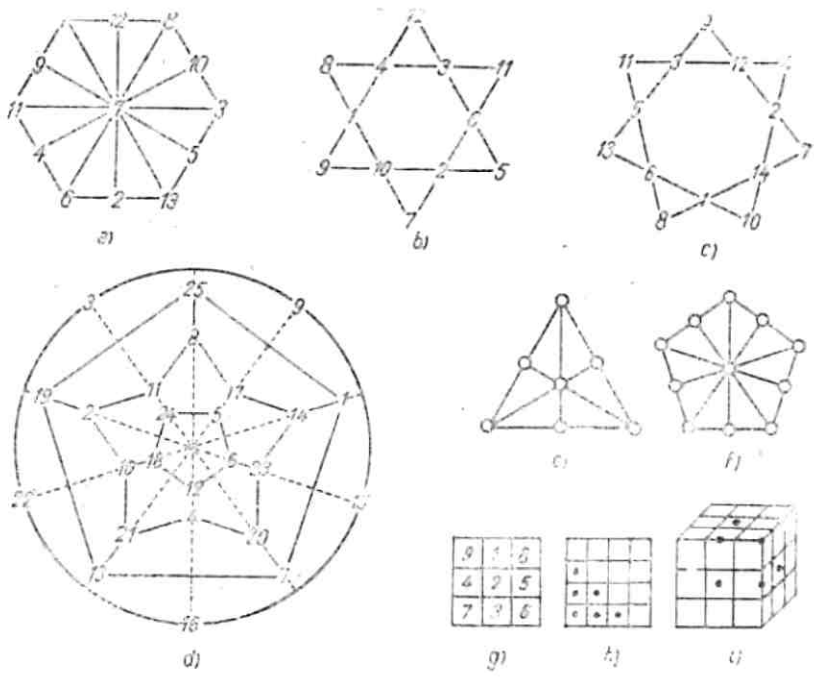


Fig. 29

În fig. 29 este reprezentat un hexagon magic *a*) precum și „stelele magice" *b*) și *c*), în care dacă însumăm numerele după oricare dintre direcțiile rectilinii indicate, dau valori egale. În

fig. 29, *d* este reprezentată așa-numita proiecție *centrală* a unui dodecaedru regulat — (vezi explicația la fig. 117) desenată în interiorul unui cerc *l*. Dacă vom forma sumele numerelor dispuse: 1) în vîrfurile vreunei fețe a dodecaedrului (19+2+11+8+25, 11+8+17+5+24 etc.), 2) în lungul cîte uneia dintre liniile punctate; 3) pe circumferință, atunci fiecare dintre aceste 19 sume va fi egală cu 65.

Încercați să analizați următoarele probleme:

1) Este oare posibil să construim un triunghi „magic" și un pentagon „magic" analoge exagonului *a*), așezînd în schemele *e*) și *f*) respectiv numerele de la 1 pînă la 7 și de la 1 pînă la 11 ? ([45])

2) La steaua *b*) nu numai fiecare grup de patru numere din lungul laturilor va da suma 26, ci și fiecare grup de cîte patru numere situate în vîrfurile romburilor mari vor da aceeași sumă (12+1+7+6 etc.), precum și fiecare grup de cîte cinci numere „legate" de vîrfurile stelei (3+4+8+1+10 etc.).

Ați reușit oare să găsiți metode esențial diferite pentru a dispune numerele de la 1 pînă la 12 în aceeași schemă, astfel ca fiecare dintre cele 15 grupări de numere menționate să dea din nou suma 26 ?

3) Să se dispună numerele de la 1 pînă la 9 în celulele unui pătrat de ordinul 3 astfel ca fiecare dintre cele patru „sume unghiulare", formate din cîte trei termeni, să fie egală cu un același număr *s*. De exemplu, pentru pătratul *g*) avem $s=14=4+7+3=3+6+5=5+8+1=1+9+4$.

Numărul *n* de soluții esențial diferite ale problemei depinde de *s* în felul următor :

s	12	13	14	15	16	17	18
n	3	6	10	9	10	6	3

. Pentru $s<12$ și pentru $s>18$, problema nu are soluții.

Combinînd simetrii în raport cu o dreaptă și rotații cu 90°, 180° și 270°, se pot obține din fiecare dintre cele 47 soluții esențial diferite încă 7 soluții care nu diferă esențial de soluția respectivă.

Încercați să cercetați problema analogă pentru un pătrat de ordinul 4 (fig. 29, *h*) și pentru cubul de ordinul 3 (fig. 29, *i*), în care sînt marcate celulele conținînd termenii uneia dintre „sumele unghiulare".

§ 17. PĂTRATELE LUI EULER

Dacă în celulele unui pătrat de ordinul *n* așezăm *n* elemente de „speța întîi", a_1, a_2,...,a_n și *n* elemente de „speța a doua", b_1, b_2,..., b_n (fiecare este luat de cîte *n* ori), în așa fel încît:

1) în fiecare celulă a pătratului să figureze cîte un element din fiecare speță;

2) fiecare element de speţa întîi să fie combinat o dată numai o dată cu fiecare element de speţa a doua;

3) în fiecare linie şi în fiecare coloană a pătratului să figureze toate elementele de speţa întîi ca şi de speţa a doua. Vom obţine ceea ce se cheamă un pătrat *eulerian*.

Dacă proprietatea a treia va fi caracteristică şi pentru diagonalele pătratului, vom avea un pătrat eulerian *diagonal*.

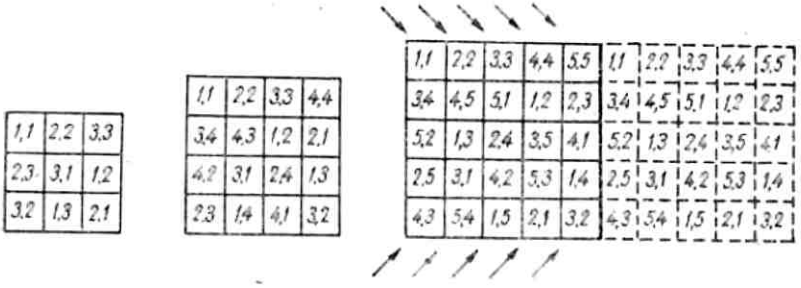


Fig. 30

În fig. 30 sînt reprezentate pătrate euleriene pentru $n=3$, 4, 5, în celule fiind notaţi numai indicii elementelor de prima şi de a doua speţă.

Pătratul *b*) va fi diagonal, iar pătratul *c*) va avea chiar următoarea proprietate: dacă îi adăugăm în dreapta un pătrat identic, atunci în oricare dintre cele zece „direcţii diagonale" marcate cu săgeţi în figură va figura orice element din prima şi cea de a doua speţă. Un astfel de pătrat se numeşte pătrat eulerian *omnidiagonal*.

Problema construirii pătratelor euleriene poate fi enunţată astfel: Să admitem că fiecare dintre cele n^2 elemente se caracterizează prin apartenenţa la una din n clase şi la una din n categorii, două obiecte oarecare diferind unul de celălalt fie prin clasă, fie prin categorie, fie prin amîndouă.

Se cere să dispunem obiectele în celulele unui pătrat de ordinul n în aşa fel încît în fiecare linie orizontală şi în fiecare linie verticală să figureze reprezentanţi ai tuturor claselor şi ai tuturor categoriilor.

Pentru $n=4$, putem lua, de exemplu, 16 cărţi de joc (as, rege, damă, valet) de patru culori diferite, iar pentru $n>4$ putem lua n^2 bucăţi de carton pe care sînt desenate n figuri diferite (pătrate, triunghiuri, cercuri etc.) vopsite în n culori diferite.

Euler personal a încercat fără succes să rezolve problema celor 36 de ofiţeri (cîte 6 ofiţeri de grad diferit din şase regimente diferite). Mai tîrziu s-a demonstrat că problema este nerezolvabilă, adică nu se poate construi un pătrat eulerian pentru $n=6$.

Micşorînd cu cîte o unitate fiecare dintre numerele care figurează în celulele unui pătrat eulerian şi considerînd apoi perechile de numere ca cifre ale unui număr scris în sistemul de numeraţie cu baza n, obţinem din orice pătrat eulerian un pătrat semimagic, iar din orice pătrat eulerian diagonal un pătrat magic.

Recomandăm cititorului să obţină pe această cale din pătratul omnidiagonal *c*) un pătrat supramagic de ordinul 5.

Orice pătrat eulerian poate fi considerat ca îmbinare a două pătrate *latine*, adică a unor pătrate completate cu n elemente (fiecare se ia de cîte n ori), astfel ca în fiecare linie şi în fiecare coloană să figureze fiecare dintre aceste elemente. Totodată, trebuie să avem combinaţii ale fiecărui element dintr-un pătrat latin cu fiecare dintre cele n elemente ale celuilalt.

§ 18. DISTRACŢII CU JOCUL DE DOMINO

După cum se ştie, fiecare dintre cele 28 de pietre ale jocului de domino este împărţită în două jumătăţi pe care sînt marcate prin puncte diferitele combinări cu repetiţie ale numerelor: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Vom nota cu (k, l) piatra avînd pe jumătăţile ei k şi l puncte.

Alăturînd pietrele în aşa fel încît jumătăţile cu acelaşi număr de puncte să fie una în dreptul celeilalte, putem forma un „lanţ". Lanţul care are la capete jumătăţi identice poate fi închis. Desfăcînd lanţul închis, din n pietre, în diverse locuri, putem obţine lanţuri deschise.

Putem considera un „domino generalizat", avînd pe jumătăţile pietrelor toate combinările cu repetiţie posibile ale numerelor 0, 1, 2, ..., $n-1$, n.

Încercaţi să rezolvaţi următoarele probleme:

1) Să se arate ([46]) că numărul de pietre şi suma tuturor punctelor în domeniul generalizat sînt egale respectiv cu $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ şi cu $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$.

2) Să se demonstreze ([47]) că, dacă eliminăm dintr-un joc cu n pietre (n par) piatra (a, b) unde $a \neq b$, atunci din pietrele rămase vom putea forma numai un lanţ deschis, avînd la capete a şi b puncte.

3) Să se demonstreze ([48]) că în cazul unui domino cu n pietre (n impar) nu putem forma un lanţ din toate piesele şi că lanţul cel mai lung va conţine cel mult $\frac{n^2+2n+3}{2}$ pietre.

4) Să se împartă cele 28 de pietre la patru jucători în așa fel încît pînă în momentul cînd primul termină jocul, nici al doilea și nici al treilea jucător să nu aibă posibilitatea de a așeza vreo piatră ([49]).

5) Configurația reprezentată în fig. 31 poate fi împărțită în 14 pătrate conținînd fiecare cîte patru numere egale. Permutînd între ele numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 și folosind simetrii în raport cu axa verticală a figurii, putem obține 10 080 ($=2\cdot 7!$) figuri (inclusiv cea dată) care nu se deosebesc esențial una de alta.

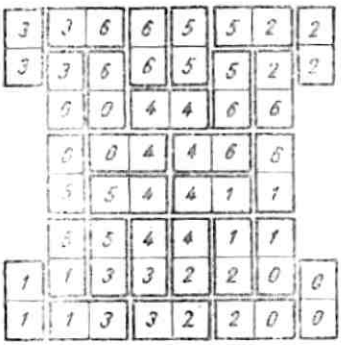


Fig. 31

Fig. 32

Nu ați putea oare să găsiți o figură de aceeași formă și cu o împărțire esențial diferită în 14 pătrate, avînd fiecare cîte 14 numere egale ?

6) În fig. 32, pietrele de domino sînt astfel dispuse încît eliminînd în gînd coloana din dreapta, formată din zerouri, căpătăm un pătrat de ordinul 7, în care suma punctelor de pe orice diagonală și din orice linie orizontală sau verticală este egală cu 24.

Nu ați putea oare să construiți un pătrat $(n-1)^2$ pentru dominoul generalizat ?

§ 19. PROBLEME REFERITOARE LA JOCUL DE ȘAH

În § 15 am analizat problema pentru determinarea numărului de moduri în care putem deplasa figuri de șah de pe un cîmp al tablei pe altul.

Să ne mai ocupăm de două probleme clasice, problema damelor și cea a calului, precum și de o seamă de probleme legate de acestea.

Unele dintre ele sînt interesante datorită legăturilor lor strînse cu teoria combinărilor, altele pot servi ca izvor pentru cercetări și pentru căutarea unor soluții originale.

Problema turnurilor

În cîte moduri putem așeza pe o tablă cu n^2 *cîmpuri un număr de* n *turnuri, în așa fel încît ele să nu se amenințe unul pe altul?*

Evident, turnurile trebuie situate în linii și în coloane diferite ale tablei. Orice repartiție de acest fel a n figuri pe tabla de șah poate fi caracterizată printr-o permutare a numerelor 1, 2, 3, ..., $n-2$, $n-1$, n, dacă vom conveni că numerele consecutive din permutare indică numerele de ordine ale liniilor pe care le ocupă figurile așezate respectiv în coloanele întîi, a doua etc.

Dat fiind că oricărei permutări îi va corespunde o soluție determinată a problemei noastre, iar diverselor permutări le corespund, evident, soluții diferite, numărul total de soluții ale problemei noastre va fi $n!$.

Problema turnurilor se complică mult dacă ne interesăm numai de soluțiile în care nici un turn nu este situat pe diagonala care unește cîmpul din stînga jos cu cel din dreapta sus. Numărul total N al acestor soluții este dat de formula

$$N = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right),$$

el este egal cu numărul de permutări a n elemente în care nici un element nu-și ocupă locul „normal".

Variind restricțiile impuse (bunăoară, cerînd ca turnurile să fie așezate numai pe cîmpuri albe sau considerînd ambele diagonale ca zonă „interzisă" etc.), ajungem la probleme combinatorii mai mult sau mai puțin dificile.

Problema damelor

În cîte moduri putem așeza n *dame pe o tablă cu* n^2 *cîmpuri, astfel încît ele să nu se amenințe una pe alta?*

Damele dispuse în cîmpurile (p, q) și (s, t) se amenință în direcție diagonală, dacă și numai dacă $|p - s| = |q - t|$; aici p, s

sînt numere de coloane, iar q, t numere de linii, la intersecția cărora se află respectiv cîmpurile (p, q) și (s, t). În permutarea corespunzătoare (vezi problema turnurilor), în locurile al p-lea și al s-lea trebuie să figureze numerele q și t. O permutare din n numere va reprezenta o soluție a problemei dacă și numai dacă diferența dintre numerele de ordine ocupate de două numere oarecare va diferi în valoare absolută de diferența acestor numere.

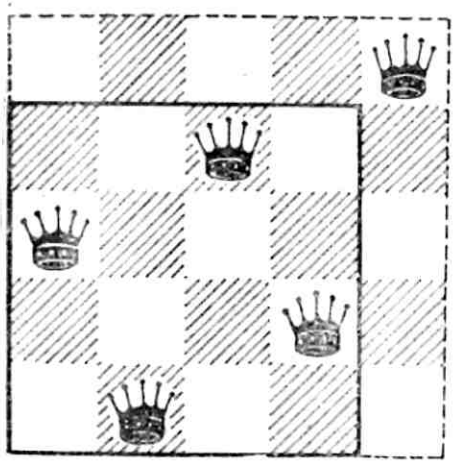


Fig. 33

Ne convingem ușor că pentru $n=2$ și pentru $n=3$, problema damelor nu are soluție. Pe baza fig. 33, se verifică ușor că problema are soluție penru $n=4$ și pentru $n=5$; pentru $n\geqslant 6$, tabela de mai jos ne arată că problema are soluție :

Forma numărului n	Permutarea care dă soluția problemei damelor
$6k$ $6k+4$	$2, 4, 6, 8, \ldots, n-2, n, 1, 3, 5, 7, \ldots, n-3, n-1$
$6k+2$	$4, n-2, n-4, n-6, \ldots, 10, 8, 6, n, 2, n-1, 1, n-5, n-7, \ldots, 5, 3, n-3$
$6k+1$ $6k+5$	$n, 2, 4, 6, \ldots, n-3, n-1, 1, 3, 5, \ldots, n-4, n-2$
$6k+3$	$n, 4, n-3, n-5, \ldots, 10, 8, 6, n-1, 2, n-2, 1, n-6, n-8, \ldots, 7, 5, 3, n-4.$

Încercați să demonstrați că în fiecare dintre aceste permutări, diferența dintre două elemente arbitrare este diferită ca valoare absolută de diferența dintre numerele de ordine ale locurilor lor. Verificați aceasta, de exemplu, pentru $k=1$ și pentru $k=2$.

Problema numărului soluțiilor problemei damelor pe o tablă cu n^2 cîmpuri, pentru n arbitrar, este nerezolvată pînă în prezent, în pofida eforturilor depuse de mulți matematicieni. În cazul particular $n=8$ s-a stabilit că problema are 92 de soluții. Printre

acestea sînt „independente" numai 12; ele sînt caracterizate de permutările

15863724	25741863	27581463
16837425	26174835	35841726
24683175	26831475	36258174
25713864	27368514	35281746

Celelalte soluții se obțin din acestea 12 prin „simetria tuturor figurilor" în raport cu linia mediatoare a tablei de șah și prin rotirea figurilor (luate în poziția lor „inițială" și în cea „simetrică") cu 90°, cu 180° și cu 270° în raport cu centrul tablei de șah.

În fig. 34, în rîndul de sus este dată soluția corespunzătoare permutării 15863724 împreună cu cele trei soluții care se obțin din ea prin rotații de 90°, 180° și 270°; în rîndul de jos sînt reprezentate soluția „simetrică" și cele care se obțin din ea prin rotațiile corespunzătoare.

Așadar, fiecare dintre permutările menționate dă, în general, doar 8 soluții; face excepție ultima permutare, care nu dă decît trei soluții noi (verificați !).

Cele două probleme pe care le-am studiat pot fi generalizate în diverse direcții. De exemplu, putem așeza n turnuri sau n dame pe o tablă cu m^2 cîmpuri ($m > n$) sau pe o tablă cu $p \times q$ cîmpuri ($p \geqslant n$, $q \geqslant n$).

Putem căuta soluții ale problemei în care, de exemplu, nici o pereche de figuri așezate pe tablă nu vor fi legate între ele prin mutarea calului etc.

În sfîrșit, putem considera o rețea tridimensională cu n^3 cîmpuri (sau chiar o rețea k-dimensională cu n^k cîmpuri, avînd $n-1$ unități pe fiecare „dimensiune", pentru care se pune problema de a așeza în nodurile ei n^2 (respectiv n^{k-1}) turnuri sau dame, în așa fel încît să nu se amenințe unele pe altele.

Vom considera, în aceste condiții, că turnul sau dama poate ajunge într-un nod considerat din orice nod avînd numai o singură coordonată diferită de coordonate corespunzătoare a nodului dat, iar dama poate în plus să ajungă în nodurile în care două coordonate diferă de coordonatele corespunzătoare ale nodului inițial cu numere egale în valoare absolută. Desigur, putem defini și altfel mutarea damei, de exemplu, considerînd că nodurile $A(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ și $B(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ sînt unite printr-o mutare a damei dacă diferențele $b_s - a_s$ (pentru $s = 1, 2, \ldots, k-1, k$) iau — independent una de alta — una dintre valorile $0, m, -m$ (m este un număr întreg arbitrar), cu condiția ca cel puțin una dintre aceste diferențe să nu fie nulă.

Cu această definiție a mutării damei ar prezenta interes problema determinării celor mai mici valori ale lui n (n este funcție de k) pentru care problema damelor are cel puțin o soluție.

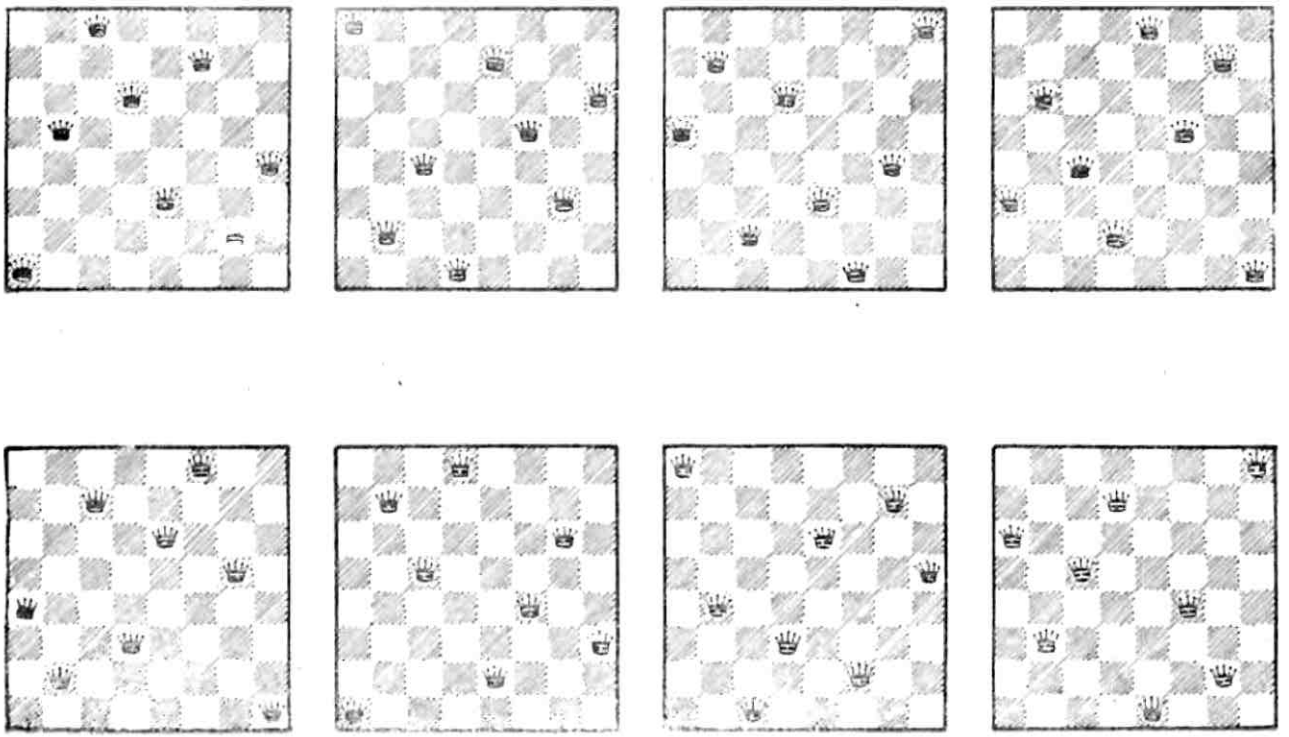


Fig. 34

Menționăm că problema așezării a n nebuni (situați pe cîmpuri albe și negre) pe o tablă cu n^2 cîmpuri s-a dovedit de dificultate medie între problema turnurilor și problema damelor. Numărul soluțiilor ei a fost stabilit relativ recent.

Problema calului

Să se parcurgă din mutarea calului toate cîmpurile unei table de șah, trecînd prin fiecare cîmp o dată și numai o dată.

Această problemă s-a bucurat de atenția multor matematicieni mari, care au dat o serie de procedee pentru obținerea unor soluții particulare. Pînă în prezent, însă, nu s-a stabilit nici măcar care este numărul de soluții ale problemei, deși se știe că acest număr este foarte mare.

Tabla de șah obișnuită poate fi înlocuită printr-o tablă cu n^2 cîmpuri ($n \neq 8$), sau printr-o tablă dreptunghiulară cu $m \times n$ cîmpuri. În sfîrșit, putem lua și table nedreptunghiulare, sau table cu „lacune" în interior.

În fig. 35 sînt date cîteva soluții ale problemei calului cu desenele care se obțin unind prin segmente de dreaptă centrele cîmpurilor prin care calul trece rînd pe rînd.

S-a găsit o soluție a problemei calului, care, în cazul cînd cîmpurile tablei sînt renumerotate în ordinea în care sînt parcurse, conduce la un pătrat semimagic avînd aceeași sumă ($s = 260$) pe linii și pe coloane (fig. 35, c).

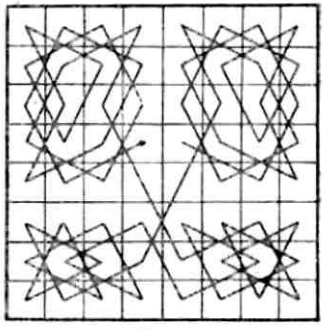
Calul obișnuit poate fi înlocuit printr-un „cal p, q" care se deplasează la fiecare mutare cu p cîmpuri într-o direcție și cu q cîmpuri în cealaltă, numerele p și q trebuind să fie de paritate diferită, deoarece, altfel, „calul p, q" s-ar putea deplasa numai pe cîmpuri de o singură culoare.

Ne convingem ușor că o tablă cu 3^2 cîmpuri nu poate fi parcursă prin mutarea unui cal obișnuit. Problema nu este posibilă nici pentru o tablă cu 4^2 cîmpuri, pe cînd în cazul unei table dreptunghiulare cu 3×4 cîmpuri, problema are soluție.

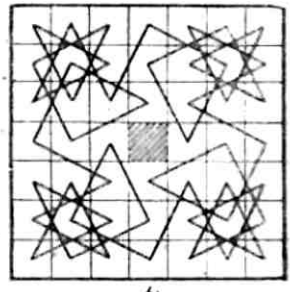
Natural, pe măsură ce cresc numerele p și q (sau cel puțin unul dintre ele), problema se poate dovedi irezolvabilă pe o tablă cu n^2 cîmpuri, chiar pentru anumite valori ale lui $n > 4$.

Este interesant să cercetăm, de exemplu, dacă putem parcurge o tablă cu n^2 cîmpuri (pentru $n = 5, 6, 7, 8$) cu un „cal 2, 3" sau cu un „cal 1, 4". Cînd problema este nerezolvabilă, putem pune problema numărului minim de cîmpuri care nu intră în circuit

(de exemplu, un cal obișnuit poate trece prin toate cîmpurile unei table cu 3^2 cîmpuri, cu excepția cîmpului central). Cînd problema are soluție, putem căuta o rezolvare cu desene originale.



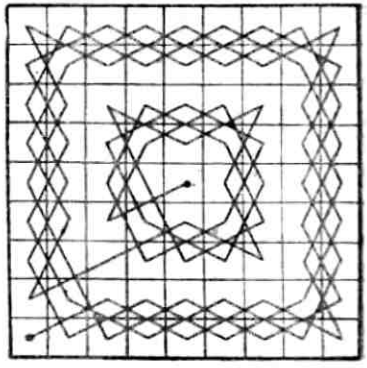
a)



b)

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

c)



d)

Fig. 35

Problema obișnuită a calului este echivalentă cu următoarea problemă de aritmetică: să se scrie 64 de perechi distincte de numere întregi (a_1, b_1) (a_2, b_2), ..., (a_{64}, b_{64}) (numerele a_k și b_k pot lua valorile cuprinse între 1 și 8) astfel încît pentru două perechi vecine oarecare să fie satisfăcută condiția

$$(a_{k+1} - a_k)^2 + (b_{k+1} - b_k)^2 = 5$$

(o componentă variază cu o unitate, iar cealaltă cu două). Dacă în afară de aceasta, $(a_{64} - a_1)^2 + (b_{64} - b_1)^2 = 5$, atunci din punctul final al drumului putem ajunge prin mutarea calului iarăși în punctul inițial. Drumurile care satisfac această egalitate din urmă se numesc *închise*.

Sînt interesante şi problemele legate de parcurgerea tablei de către rege sau de către un turn, care face mutări doar pînă la un cîmp vecin (mutări simple ale turnului).

Avînd în vedere că în orice poziţie a turnului, el dispune cel mult de patru mutări, în timp ce regele sau calul pot face din anumite cîmpuri cîte 8 mutări diferite, este natural să ne aşteptăm ca problemele legate de turn să fie cele mai simple.

Nu veţi putea oare să găsiţi în cîte moduri diferite poate un turn să parcurgă o tablă cu n^2 cîmpuri pentru $n=3, 4, 5,...$ sau o tablă cu $m \times n$ cîmpuri pentru valori diferite ale lui m şi ale lui n? (Poate izbutiţi chiar să aflaţi soluţia generală a problemei pentru m şi n arbitrari).

Trebuie menţionat că pentru valori impare ale produsului mn nu există drumuri închise ale turnului pe tabla cu $m \times n$ cîmpuri, deoarece cîmpul iniţial şi cel final vor fi neapărat de aceeeaşi culoare (turnul trebuie să efectueze un număr par de mutări pentru a ajunge la cîmpul final) şi deci ele nu pot fi unite printr-o mutare elementară a turnului. Este, de asemenea, evident că pentru tablele cu număr par de cîmpuri, cîmpul iniţial şi cel final nu pot fi (pentru turn) de aceeaşi culoare, ceea ce explică, între altele, faptul

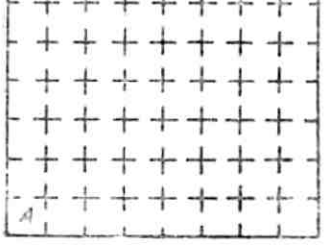


Fig. 36

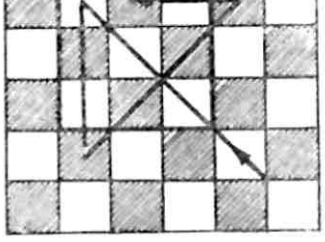


Fig. 37

că următoarea problemă nu are soluţie: pornind din camera A (fig. 36), să se treacă prin toate camerele cîte o singură dată prin fiecare, terminînd circuitul în camera B.

Mai menţionăm problemele în care o anumită figură trebuie să parcurgă toate cîmpurile tablei fără a se opri neapărat în fiecare cîmp şi, eventual, trecînd de mai multe ori prin anumite cîmpuri. De exemplu, ne convingem uşor că turnul poate parcurge în $2n - 1$ mutări o tablă cu n^2 cîmpuri. Dacă înlocuim turnul prin damă, pentru o tablă cu 3^2 cîmpuri, numărul de mutări necesare pentru

a parcurge tabla rămîne același. Dacă însă așezăm o porțiune pătrată formată din nouă cîmpuri în interiorul unei table mari și permitem damei să iasă din limitele ei, atunci întreaga porțiune nu va mai fi parcursă în cinci mutări, cum este cazul pentru turn, ci în patru (fig. 37). Problema analogă se poate pune pentru $n > 3$ în cazul unei porțiuni cu n^2 cîmpuri așezate în interiorul unei table mari.

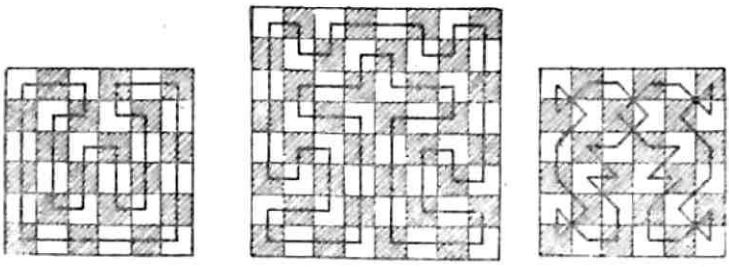


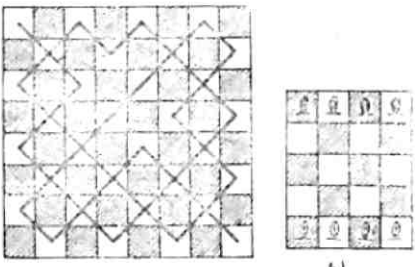
Fig. 38

Este interesant, de asemenea, să căutăm soluțiile problemei calului (regelui sau turnului) atunci cînd drumul se efectuează după o anumită linie frîntă deosebită (vezi fig. 38). În acest caz, pentru drumurile deschise putem indica în plus cîmpul inițial și cel final.

Probleme

1) Pentru valori mici ale lui n, k, cercetați problema calului în cazul unei rețele k-dimensionale cu n^k cîmpuri, considerînd că nodurile $A(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ și $B(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ ale rețelei sînt legate prin mutarea calului dacă $\sum_{i=1}^{k} (a_i - b_i)^2 = 5$ și $\sum_{i=1}^{k} |a_i - b_i| = 3$. Cercetați problema similară pentru valori mici ale lui p și q în cazul unui „cal p, q".

2) Nebunul poate parcurge toate cîmpurile de aceeași culoare ale unei table cu 8^2 cîmpuri în 17 mutări (fig. 39, *a*). Care este numărul minim de mutări necesare pentru a parcurge toate cîmpurile de aceeași culoare ale unei table cu n^2 cîmpuri ($n = 9, 10, 11, \ldots$)?



a) *b)*

Fig. 39

3) Mutînd alternativ nebunii albi și negri (fig. 39, *b*), să se schimbe locurile lor în 36 de mutări, astfel ca figurile de culoare diferită să nu se amenințe niciodată una pe alta ([50]).

4) Să se arate că există în total numai 8 drumuri pe care le poate parcurge calul pe tabla cu 3×4 cîmpuri și că toate aceste drumuri sînt deschise ([51]).

5) O proprietate interesantă se remarcă la figura a cărei mutare leagă două cîmpuri arbitrare (k, l) și (m, n) ale tablei de șah pentru

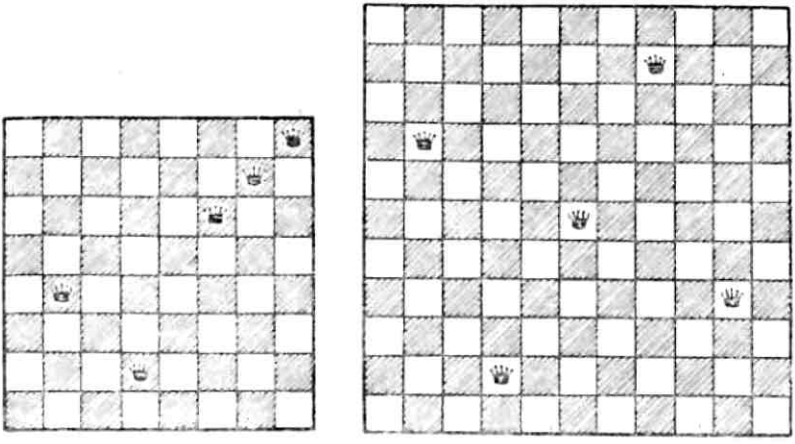


Fig. 40

care avem $(k-m)^2+(l-n)^2=25$. Această figură se deplasează și ca turnul (trecînd peste patru cîmpuri pe al cincilea) și ca un „cal 3,4" ; de pe orice cîmp al tablei cu 8^2 cîmpuri, ea poate face exact 4 mutări.

Nu ați reușit oare „să creați" alte figuri care să aibă o proprietate analogă pe o tablă cu n^2 cîmpuri ($n=6, 7, 9, 10...$) și pe o rețea k — dimensională cu n^k — cîmpuri ($k=3,4...$) ?

6) Din figura 40 se vede că cinci dame pe tabla cu 8^2 cîmpuri pot amenința toate cîmpurile, iar pe tabla cu 11^2 cîmpuri, ele amenință toate cîmpurile în afară de cele ocupate chiar de ele.

Să se afle cele mai mari valori ale lui N_1 și N_2 cu condiția ca n dame ($n=6, 7, 8, 9...$) să poată ține sub amenințare toate cîmpurile unei table cu N_1^2 cîmpuri și toate cîmpurile unei table cu N_2^2 cîmpuri, cu excepția celor pe care le ocupă chiar ele.

§ 20. ÎNTOCMIREA ORARELOR

Vom da cîteva probleme de alcătuire a orarelor, în conformitate cu care membrii unui anumit colectiv trebuie să se reunească în așa fel încît să fie satisfăcute totodată și anumite condiții suplimentare.

1. *Treisprezece copii aşezaţi în cerc trebuie să execute 6 exerciţii diferite. Este oare posibil ca aceasta să se facă în aşa fel, încît de fiecare dată oricare dintre copii să aibă vecini noi ?*

Punînd în locul copiilor literele de la A pînă la M, vom aşeza pe A pe linia frîntă închisă care împarte prin vîrfurile ei un cerc în 12 părţi egale (fig. 41, *a*) şi vom aşeza uniform celelalte litere pe cerc.

Parcurgînd linia frîntă din poziţia iniţială, indicată în figură, precum şi după ce o rotim în jurul centrului cu 30°, 60°, 90°, 120°

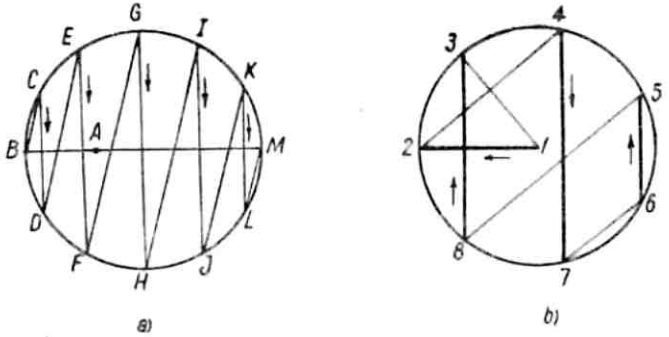


Fig. 41

şi 150°, în sens contrar mişcării acelor de ceasornic (litera A se deplasează o dată cu cercul, pe cînd celelalte litere rămîn pe locurile lor), vom obţine 6 şiruri de litere ;

1) *ABCDEFGHIJKLMA*,
2) *ADBFCHEJGLIMKA*,
3) *AFDHBJCLEMGKIA*,
4) *AHFJDLBMCKEIGA*,
5) *AJHLFMDKBICGEA*,
6) *ALJMHKFIDGBECA*,

Încercaţi să demonstraţi că acest procedeu este potrivit şi în cazul general cînd $2n+1$ copii trebuie să execute n exerciţii. Poate veţi reuşi să găsiţi un procedeu mai simplu pentru rezolvarea acestei probleme.

2. *Să se întocmească orarul unui turneu de şah pentru opt participanţi.*

Vom aplica o metodă analogă celei din problema precedentă : aşezînd nr. 1 în centrul cercului, iar celelalte şapte numere în vîrfurile poligonului înscris cu şapte laturi, vom întocmi cu ajutorul unei linii frînte (fig. 41, *b*) ale cărei segmente sînt desenate alternativ cu linii groase şi subţiri, orarul pentru două zile, unind întîi numerele de la capetele liniilor groase, iar apoi pe cele de la capetele liniilor subţiri :

ziua 1 : 1, 2 4, 7 6, 5 8, 3 ;
ziua a 2-a : 3, 1 2, 4 7, 6 5, 8.

Dacă vom menține sensul de parcurgere indicat și vom considera că primul dintre numerele fiecărei perechi joacă cu albele, iar al doilea cu negrele, atunci fiecare jucător va trebui în cursul celor două zile să joace și cu negrele și cu albele.

Rotind linia frîntă în sens orar în jurul centrului cu $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{8\pi}{7}$ și $\frac{12\pi}{7}$ radiani și folosind în ultimul caz numai liniile groase, alcătuim cu ușurință orarul pentru restul de cinci zile :

ziua a 3-a :	1, 4	6, 2	8, 7	3, 5
ziua a 4-a :	5, 1	4, 6	2, 8	7, 3
ziua a 5-a :	1, 6	8, 4	3, 2	5, 7
ziua a 6-a :	7, 1	6, 8	4, 3	2, 5
ziua a 7-a :	1, 8	3, 6	5, 4	7, 2.

Acest procedeu este potrivit dacă n (numărul jucătorilor) este par ; dacă însă n este impar, ajunge să introducem un jucător fictiv, iar pe jucătorul care urmează să întîlnească în ziua respectivă pe jucătorul fictiv îl considerăm că nu joacă. De exemplu, micșorînd în orarul de mai sus toate numerele cu o unitate și considerînd că jucătorul nr. 0 este fictiv, vom obține un orar unde fiecare dintre cei 7 jucători va avea de trei ori albele și de trei ori negrele, avînd totodată cîte o zi în care nu joacă.

3. *Cincisprezece copii se reunesc în fiecare zi pentru a se juca în grupe de cîte trei copii fiecare. Să se întocmească orarul săptămînal în așa fel încît fiecare copil să aibă în fiecare zi parteneri noi.*

Această problemă propusă (într-o formă întrucîtva diferită) de Kirkman în 1850 a atras îndată atenția mai multor mari matematicieni. Reproducem una din soluțiile posibile :

ziua 1 :	*a,b,c*	*d,e,f*	*g,h,i*	*j,k,l*	*m,n,o*
ziua a 2-a :	*a,d,g*	*b,e,h*	*c,l,o*	*j,n,i*	*m,k,f*
ziua a 3-a :	*a,j,m*	*b,k,n*	*c,f,i*	*d,h,o*	*g,e,l*
ziua a 4-a :	*a,i,o*	*b,d,j*	*c,e,k*	*g,n,f*	*m,h,l*
ziua a 5-a :	*a,f,l*	*b,g,m*	*c,h,n*	*d,i,k*	*j,e,o*
ziua a 6-a :	*a,h,k*	*b,f,o*	*c,g,j*	*d,l,n*	*m,e,i*
ziua a 7-a :	*a,e,o*	*b,i,l*	*c,d,m*	*g,k,o*	*j,h,f*

Diverși autori au dat metode pentru rezolvarea problemelor analoge cu $n=5\cdot 3^k$ cu $n=3^k$, cu $n=63$ $(=2^6-1)$ și cu $n=255(=2^8-1)$.

Ar fi interesant să găsim pentru problema fundamentală și pentru variantele ei orare ușor de memorat care să permită participanților de a realiza simplu regrupările necesare.

Matematicianul englez Sylvester (din secolul trecut) a pus problema (se pare pînă acum nerezolvată) a repartiției tuturor combinărilor posibile cîte trei (numărul lor $= C_{15}^{3} = 455$) în 13 complexe care, împărțite fiecare în cîte 7 grupe, să dea soluția problemei lui Kirkman.

Soluția acestei probleme este echivalentă cu alcătuirea unui orar trimestrial (13 săptămîni) în care să nu se repete nici o combinare.

În problemele de care ne-am ocupat și în altele asemănătoare se poate pune întrebarea : (vorbind în general, nu prea ușoară) Care este numărul de orare esențial diferite, considerînd că două orare se deosebesc neesențial dacă unul poate fi obținut din altul cu ajutorul unei substituții (înlocuirea unor elemente prin altele) efectuate în întregul orar, precum și prin permutarea diverselor zile ?

Gîndiți-vă la următoarea

P r o b l e m ă. *Să se întocmească* (pentru valori diferite ale lui n) *un orar pentru* $n+1$ *zile care să reunească* n^2 *elevi în grupe de cîte* n *fiecare, astfel ca oricare dintre ei să fie reuniți de fiecare dată cu alți colegi.*

Există o metodă simplă pentru rezolvarea acestei probleme cînd n este prim, dar metoda nu este adecvată cînd n nu este prim.

§ 21. „PROBLEMA LUI JOSEPHUS FLAVIUS" ȘI ALTELE ASEMĂNĂTOARE

Fie un cerc pe care sînt așezate n elemente, iar noi, începînd să numărăm cu unul dintre ele, vom elimina fiecare al k-lea element (tăindu-l, dacă problema se rezolvă pe hîrtie, sau punîndu-l de o parte, dacă pe cerc sînt așezate anumite obiecte) ; după ce am eliminat un element, începem să numărăm cu următorul element rămas pe cerc etc.

În aceste condiții putem pune următoarele probleme :

1. *Ce element va fi eliminat a* s*-a oară* $(1 \leqslant s \leqslant n)$? Pentru $n=40$ și $k=3$, se spune că problema urma să fie rezolvată de istoricul Josephus Flavius pentru $s=39$ și pentru $s=40$, pentru ca să rămînă pe cerc împreună cu prietenul său după 38 de eliminări.

2. *Cum trebuie așezate cele* n *elemente, pentru ca ele să fie eliminate într-o ordine dinainte stabilită ?*

Pentru rezolvarea acestei probleme este suficient ca, scriind pe rînd primele n numere naturale, în locul elementelor considerate, și în aceste condiții, de fiecare dată cînd ajungem la numărul extrem înaintînd de la stînga spre dreapta, să subliniem fiecare al k-lea număr, indicînd totodată dedesubt al cîtelea număr eliminat este. În aceste condiții de fiecare dată cînd ajungem la numărul extrem neeliminat din dreapta, trebuie să reluăm numărătoarea de la capătul din stînga, ceea ce echivalează cu o mișcare pe cerc.

Să găsim, bunăoară, cum trebuie așezate 9 cărți de joc de aceeași culoare, pentru ca reașezînd una după alta cărțile de sus jos și punînd pe masă fiecare a patra carte să le așezăm succesiv pe toate după valoare, de la as pînă la șase.

Să admitem că în coloana inițială, cărțile sînt numerotate de sus în jos :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
(9)	(8)	(3)	(1)	(6)	(5)	(7)	(2)	(4)

Numerele cuprinse între paranteze au fost obținute astfel : înaintăm de la stînga spre dreapta în rîndul de sus ; marcăm fiecare al patrulea număr și scriem totodată dedesubtul lui între paranteze numărul de ordine ; continuînd mișcarea de la stînga spre dreapta, numerele marcate nu se mai iau în considerare (cărțile corespunzătoare se pun pe masă).

Deoarece, conform enunțului problemei, prima carte așezată pe masă urmează să fie asul, ea trebuie să fie dispusă în locul al patrulea de sus, riga în locul al optulea, dama în locul al treilea etc. și, în sfîrșit, șase în primul loc de sus, Prin urmare, ordinea cărților trebuie să fie următoarea : șase, șapte, damă, as, nouă, zece, opt, rilă, valet.

Pentru valori mari ale lui n, îndeosebi dacă ne interesează poziția unui anumit element care trebuie eliminat, ca al s-lea, există un procedeu mai simplu, care nu presupune o determinare prealabilă a poziției elementelor eliminate anterior.

Să notăm cu x cel mai mic număr întreg care satisface inegalitatea $\{\ ,\ \} \geqslant x$, iar șirul de numere

$$a_1 = \{a\},\ a_2 = \{a_1 q\},\ a_3 = \{a_2 q\}, \ldots, a_n = \{a_{n-1} q\}, \ldots$$

îl vom denumi *„progresie geometrică în numere întregi"* de rație q.

Pentru a afla numărul de ordine t al elementului care trebuie să fie al s-lea element eliminat (dacă numărul inițial al elementelor este n și dacă eliminăm de fiecare dată elementul al k-lea, trebuie să alcătuim o „progresie geometrică în numere întregi" în care $a=k(n-s)+1$ și $q=\frac{k}{k-1}$; dacă cel mai mare dintre termenii acestei progresii care nu depășesc numărul nk va fi notat cu A, atunci $t=nk+1-A$.

Pentru exemplul nostru de mai sus cu cele nouă cărți de joc, vom încerca să aflăm, de exemplu, numărul de ordine al cărții care va fi a cincea pusă pe masă. Aici avem $n=9$, $k=4$, $s=5$, $q=\frac{k}{k-1}=$ $=4/3$, $nk=36$. De aceea

$$a_1=\{4(9-5)+1\}=17,\ a_2=\left\{17\cdot\frac{4}{3}\right\}=23,$$

$$a_3=\left\{23\cdot\frac{4}{3}\right\}=31,\ a_4=\{31\cdot 4/3\}=42>nk;$$

prin urmare, $A=31$ și $t=36+1-31=6$, adică a cincea carte pusă pe masă va fi șase.

Rezolvați următoarele probleme :

1. Să se stabilească ([51a]) prin două metode că Josephus Flavius și tovarășul său trebuiau să ocupe respectiv locurile al 13-lea și al 28-lea pentru a fi „eliminați" ca ultimul și penultimul.

2. Să se așeze 36 cărți de joc în așa fel încît trecînd cinci cărți dedesubtul pachetului și punînd pe masă cartea a șasea să apară succesiv în ordinea mărimii, întîi toate cărțile de o culoare, apoi de a doua, de a treia culoare și, în sfîrșit, cele de a patra culoare ([51,b]).

Construind o progresie geometrică în numere întregi, să se determine în ce loc trebuie să fie situat asul de a treia culoare ($s=19$), valetul de a patra culoare ($s=31$) și șaptele din culoarea a doua ($s=17$).

§. 22. PROBLEME DISTRACTIVE CU DEPLASĂRI DE OBIECTE

În primele patru probleme ale acestui paragraf trebuie să ajungem la o așezare dinainte stabilită a obiectelor, mutîndu-le după reguli determinate. Unele din aceste probleme pot servi pentru discuții și generalizări în diverse direcții.

La sfîrșitul paragrafului ne ocupăm de problema aplicării repetate a unei operații avînd ca rezultat final așezarea inițială a obiectelor. Determinarea numărului de operații necesare în acest scop este legată de proprietățile substituțiilor (vezi pag. 101—102), iar pentru rezolvarea problemei în forma generală trebuie să facem apel la teoria numerelor.

Mutarea unor obiecte în perechi

Pe o dreaptă sînt așezate patru piese negre, alternînd cu patru piese albe. Conform regulilor jocului, putem muta într-un loc nou două piese vecine (păstrînd vecinătatea și ordinea lor în lungul aceleiași drepte). Se cere ca, în patru mutări, piesele negre să ajungă toate în stînga, iar albele în dreapta (soluția este dată în fig. 42). Problema poate fi generalizată în următoarea direcție : avem k tipuri de piese, cîte s bucăți din fiecare tip. Să se cerceteze pentru ce valori ale lui k și ale lui s, putem să trecem printr-un anumit număr de mutări de la poziția *a*) la *b*) (fig. 43) ; se demonstrează că problema are soluție pentru orice $s > 4$, dacă $k = 2$).

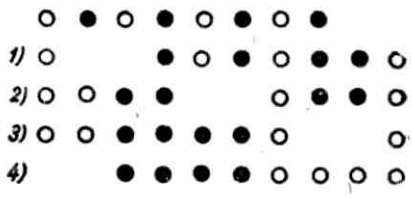


Fig. 42

Putem conveni ca într-o mutare să nu transportăm două piese vecine, ci, de exemplu, cîte trei. În acest caz, putem cădea de acord

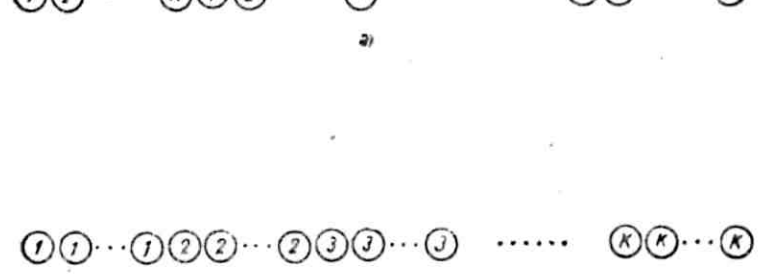


Fig. 43

să le așezăm pe noul lor loc numai în ordinea lor directă, numai în ordinea inversă sau, în sfîrșit, și într-o ordine și în cealaltă. Putem de asemenea să fixăm în alt mod poziția finală a pieselor.

Problema lui Luc

Damele sînt aşezate cum se arată în fig. 44. Se cere să schimbăm locul pieselor albe cu al celor negre, piesele albe putînd fi deplasate numai spre dreapta, iar cele negre numai spre stînga, fiecare piesă deplasîndu-se fie pe cîmpul vecin gol, fie pe cîmpul gol care se află imediat dincolo de piesa cea mai apropiată de culoarea cealaltă.

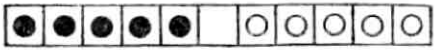


Fig. 44

Eliminînd după o analiză destul de simplă mutările care conduc la poziţii nerezolvabile, ajungem uşor la o soluţie care se scrie astfel : *amiaaannnnaaaaannnnnaaaannnn aaanna* : aici literele *a* şi *n* indică culoarea pieselor mutate.

Strîngerea monedelor pe grupuri

Opt monede sînt aşezate în linie dreaptă. Trebuie mutate patru monede în aşa fel încît să obţinem patru grupuri de cîte două monede. Totodată, fiecare monedă mutată poate fi pusă împreună numai cu o monedă despărţită de ea prin alte două monede (despărţite sau reunite în grup).

Soluţia aproape evidentă constă în a muta succesiv moneda a cincea peste a doua, a treia peste a şaptea, a patra peste prima, şi, în sfîrşit, a şasea peste a opta (vezi fig. 45).

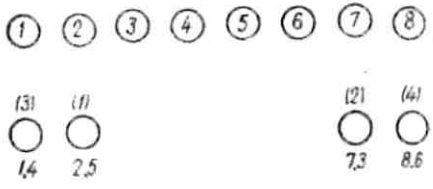


Fig. 45

Încercaţi să găsiţi soluţia problemei analoge pentru *pn* monede ($p \geqslant 4$), care trebuie strînse în *p* grupuri de cîte *n* monede, iar moneda mutată trebuie transportată peste *n* monede vecine (separat sau reunite — partial sau total — în grupuri).

Ruma

Vom prezenta într-o formă întrucîtva modificată un joc de origine indiană denumit „Tschuka — Ruma". De-a lungul unui cerc sînt dispuse $20+1$ scobituri. La începutul jocului o scobitură (ruma) este goală, iar în fiecare dintre celelalte se află cîte *n* bile (în fig. 46, $n=2$).

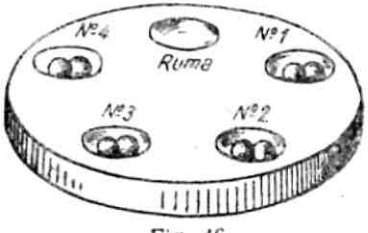


Fig. 46

Scopul jocului constă în a muta bilele pentru a le trece toate în ruma.

Vom denumi *mutare a jocului* următoarea acţiune : toate bilele aflate

într-o scobitură A se așază cîte una în scobiturile vecine (mișcarea se face în sensul mișcării acelor de ceasornic). Dacă numărul de bile distribuite este mai mare decît $2n$, atunci o bilă ajunge în scobitura A, iar celelalte bile se împart iarăși cîte una în scobiturile vecine.

Prima mutare se poate face din orice scobitură. Dacă la o anumită mutare (inclusiv la prima), ultima bilă repartizată ajunge în ruma, mutarea următoare se poate face de la orice scobitură, în afară de ruma, iar dacă ultima bilă repartizată nu a nimerit în ruma, atunci mutarea următoare trebuie să repartizeze bilele din scobitura în care a nimerit ultima bilă, cu condiția ca aceasta să nu fi fost înainte goală, căci, în acest caz, jocul se consideră pierdut.

Ne convingem ușor că prima mutare (pentru $n=2$) trebuie făcută din scobitura nr. 3, deoarece, în toate celelalte cazuri, la mutarea a doua nimerim cu ultima bilă într-o scobitură goală și pierdem. După un șir de încercări ne putem convinge că ne putem realiza scopul dorit, prin mutările efectuate consecutiv din scobiturile cu numerele 3, 4, 2, 4, 4, 1, 4, 2, 3, 4.

Pentru $n=3$ numărul maxim de bile care pot fi trecute în ruma este, evident, egal cu 15. Pentru $n=4$ avem nu mai puțin de nouă soluții diferite ale problemei.

Ar fi interesant să se dea o teorie a jocului sau cel puțin să se cerceteze o seamă de cazuri particulare urmînd să se găsească pentru fiecare calea (sau mai multe căi) de a ajunge la scop, sau să se determine numărul maxim de bile care se pot trece în ruma.

Ne putem gîndi și la diverse variante ale jocului, așezînd eventual la începutul jocului cîte s bile ($s \neq n$) în fiecare scobitură, modificînd „regulile mutărilor" etc.

Repetarea multiplă a unei operații

Există o serie de scamatorii cu cărți de joc (cărora, după cum vom vedea, li se poate da și altă formă), bazate pe următoarele: schimbînd de mai multe ori, în conformitate cu o lege dată, poziția relativă a unor obiecte, ajungem, pînă la urmă, la poziția lor inițială.

Explicația acestui fenomen enigmatic pentru neinițiați se bazează pe proprietăți simple ale substituțiilor.

Dacă avem n obiecte numerotate $a_1, a_2, \ldots, a_n$, atunci trecerea de la poziția lor inițială la poziția $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha n}$ (unde $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ este o permutare a numerelor $1, 2, \ldots, n$) poate fi caracterizată prin ceea ce se cheamă *substituția* $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots n-1 & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \quad \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$, care arată prin ce

număr (α_i) trebuie să înlocuim numărul (i) din linia de sus a substituției A.

Adesea, este comod să notăm elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prin numerele de la 1 pînă la n.

Să admitem, de exemplu, că substituția $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&8&6&3&7&1&4&2\end{pmatrix}$ este aplicată inițial permutării 1 2 3 4 5 6 7 8, apoi permutării obținute în acest fel etc. Aceasta ne va da

$$\left.\begin{array}{l} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \xrightarrow[\text{(I)}]{A} 5\,8\,6\,3\,7\,1\,4\,2 \xrightarrow[\text{(II)}]{A} 7\,2\,1\,6\,4\,5\,3\,8 \xrightarrow[\text{(III)}]{A} \\ \xrightarrow{A} 4\,8\,5\,1\,3\,7\,6\,2 \xrightarrow[\text{(IV)}]{A} 3\,2\,7\,5\,6\,4\,1\,8 \xrightarrow[\text{(V)}]{A} 6\,8\,4\,7\,1\,3\,5\,2 \xrightarrow[\text{(VI)}]{A} \\ \xrightarrow{A} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8. \\ \text{(I)} \end{array}\right\} (1)$$

Vom denumi *produs* a două substituții C și D substituția echivalentă cu substituțiile C și D efectuate una după cealaltă (întîi C și apoi D).

De exemplu, dacă $C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&1&3\end{pmatrix}$ și $D=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$,

atunci $$CD=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&2&5&3\end{pmatrix}.$$

În adevăr, în substituția C, 1 este înlocuit prin 2, iar în substituția D, 2 este înlocuit prin 4; prin urmare, în substituția CD, 1 va fi înlocuit prin 4 etc.

Verificați dacă $DC=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}$, adică $DC \neq CD$.

Se vede că $A^6=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$, adică toate elementele rămîn pe locurile lor. Această substituție se numește *substituție identică* și se notează cu E.

Cel mai mic număr natural s pentru care $B^s=E$ se numește *ordinul* substituției B. Prin urmare, ordinul substituției A este egal cu 6.

Pentru a determina repede ordinul oricărei substituții (mai ales cînd numărul de elemente permutate este mare), este comod s-o descompunem în „cicluri independente".

De exemplu, se observă ușor că în substituția A elementul 1 se înlocuiește prin 5, elementul 5 prin 7, elementul 7 prin 4, elementul 4 prin 3, elementul 3 prin 6, elementul 6 prin 1 (ciclul s-a închis).

Cu alte cuvinte, elementele 1, 5, 7, 4, 3, 6, își cedează locul unul altuia în ordine ciclică. Aceasta se poate caracteriza prin „substituția ciclică" $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, care se scrie deseori sub forma unei singure linii (1 5 7 4 3 6) sau (7 4 3 6 1 5) etc., unde trebuie să ținem minte că fiecare dintre elementele de aici „cedează" locul elementului următor, iar ultimul element ia locul primului (din care cauză este indiferent cu care element începem să scriem substituția ciclică, esențial este numai să păstrăm ordinea elementelor).

În afară de aceasta, în substituția A elementul 2 este înlocuit prin 8, iar 8 prin 2, ceea ce ne dă ciclul (2 8), denumit și *transpoziția* elementelor 2 și 8.

Ciclurile (1 5 7 4 3 6) și (2 8) se numesc *independente*, deoarece nu conțin elemente comune. Așadar, substituția A este egală cu produsul a două substituții ciclice : $A = (1\ 5\ 7\ 4\ 3\ 6)\ (2\ 8)$.

Verificați, de exemplu, că $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 2 & 4 & 1 & 8 & 10 & 5 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 9\ 3\ 4)\ (2)\ (5\ 8\ 7)\ (6\ 10)$ (aici avem chiar un ciclu cu un singur element).

Se demonstrează ușor [52] că ordinul unei substituții este egal cu cel mai mic multiplu comun al ordinelor ciclurilor independente în care ea se descompune. Astfel, ordinul substituției A este egal cu 6 (cel mai mic multiplu comun al numerelor 6 și 2), iar ordinul substituției B este egal cu 12 (cel mai mic multiplu comun al numerelor 4, 1, 3, 2).

În schema (1) trebuie să acordăm atenție faptului că în fiecare dintre tranzițiile I→II, II→III, III→IV etc., definite de aceeași substituție A, în primul loc se transportă elementul din al 5-lea loc, în al 2-lea cel din al 8-lea, în al 3-lea loc cel din al 6-lea, în al 4-lea cel din al 3-lea, în al 5-lea cel din al 7-lea în al 6-lea cel din primul, în al 7-lea cel din al 4-lea și în al 8-lea elementul din locul al doilea. Se poate demonstra că acest fapt nu este întîmplător. În afară de aceasta, va avea loc totdeauna și fenomenul reciproc, adică dacă într-o serie de treceri succesive de la o substituție la alta toate trecerile se efectuează după aceeași regulă — în sensul schimbării locurilor pe care le ocupă elementele — atunci toate aceste treceri pot fi caracterizate printr-o aceeași substituție N care arată ce element se substituie oricărui element concret [53].

Stabilind ordinul substituției M, găsim astfel de cîte ori trebuie să modificăm în felul în care ne interesează poziția relativă a elementelor pentru ca să reajungem la poziția lor inițială.

O ilustrare interesantă a problemei este

Pachetul lui Monge

Schimbarea poziției relative a unor obiecte care poartă numele de *pachetul lui Monge* o vom ilustra prin următorul exemplu : să admitem că $2n$ elevi stau așezați în rînd cîte unul (fig. 47, *a*) ; după ce s-au numărat din doi în doi, ei dublează rîndurile (fig. 47, *b*), iar cei din rîndul al doilea efectuează „manevra de ocolire", sub conducerea fostului elev din flancul sting, trecînd (conform schemei din fig. 47, *c*) în flancul drept, astfel ca cel din flancul stîng să ajungă primul din flancul drept (în fig. 47, $n=5$, iar elevii stau cu fața la noi).

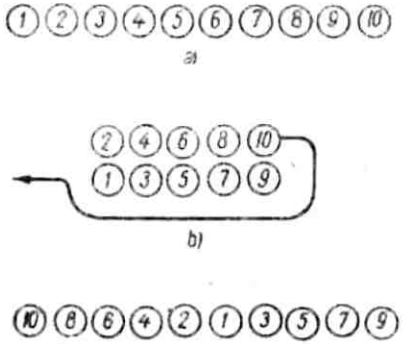


Fig. 47

Într-un pachet cu $2n$ cărți de joc, amestecarea lor după Monge se realizează astfel : luînd pachetul cu fața în jos în mîna stîngă, trebuie să trecem una după alta cărțile în mîna dreaptă, luîndu-le de sus și așezîndu-le în mîna dreaptă, cînd deasupra, cînd dedesubtul cărților strînse la momentul respectiv în mîna dreaptă. Evident, această operație va fi caracterizată prin substituția

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n-1 & n & n+1 & n+2 \dots 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-2 \dots & 4 & 2 & 1 & 3 \quad \dots 2n-3 & 2n-1 \end{pmatrix}$$

Pentru $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots$
ordinul lui $M=s=2, 3, 6, 4, 6, 10, 14, 5, 18, 10, 12, 21, 26, \dots$

Recomandăm cititorului să verifice această tabelă calculînd pentru diversele valori ale lui n, valorile corespunzătoare ale lui s.

De exemplu,

pentru $n=8$ $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$.

$M=(1\ 16\ 15\ 13\ 9)\ \ (2\ 14\ 11\ 5\ 8)\ \ (3\ 12\ 7\ 4\ 10)\ \ (6)$, adică $s=5$.

Încercați să vă convingeți (cu cărți de joc sau cu orice alte obiecte numerotate) că repetarea de s ori a permutării lui Monge conduce la poziția inițială a elementelor.

Putem așeza într-un singur rînd și $2n$ gimnaști, efectuînd apoi s regrupări după schema reprezentată în fig. 47. Rezultatul va fi restabilirea ordinei inițiale.

Se cunoaşte următoarea teoremă :

Ordinul substituţiei M este egal cu rădăcina cea mai mică a congruenţei

$$2^x \equiv -1 \pmod{4n+1},$$

iar dacă această congruenţă nu are soluţie, atunci cu rădăcina cea mai mică a congruenţei $2^x \equiv 1 \pmod{4n+1}$.

Verificaţi această teoremă pentru diverse valori ale lui n. De exemplu, pentru $n=8$, $4n+1=33$; calculînd diversele puteri ale lui 2, obţinem : $2^5 \equiv -1 \pmod{33}$, adică pentru $n=8$, avem $s=5$.

Dacă $n=5$, atunci $4n+1=21$. Pentru diversele puteri ale lui 2, avem $2^4 \equiv -5 \pmod{21}$, $2^5 \equiv -10 \pmod{21}$, $2^6 \equiv -20 \equiv 1 \pmod{21}$. Prin urmare, pentru $n=5$, ordinul substituţiei M este egal cu 6.

§ 23. PROCEDEE ELEMENTARE PENTRU CONSTRUIREA UNOR ORNAMENTE

Nu cred să se găsească un om pe care să nu-l încinte forma uimitoare a fulgilor de zăpadă, desenele minunate ale dantelelor şi ale ornamentelor create de marii maeştri, ingenioasele figuri de pe covoare şi ţesături, pardoselile de mozaic, alcătuite din plăci ceramice de diferite forme şi culori.

Însă crearea unor figuri geometrice frumoase este accesibilă oricui are destulă răbdare — numai să vrea !

Acest paragraf şi cîteva din cele care urmează sînt consacrate unor distracţii geometrice de dificultate diferită, care urmăresc obţinerea unor desene, ornamente, curbe frumoase etc. Vom începe cu ceea ce este mai simplu.

Ornamente pe hîrtie milimetrică

Pe o hîrtie milimetrică oricine este în stare să deseneze, fără prea mult efort, diverse figuri ingenioase ; nu este nevoie neapărat să urmeze numai laturile pătrăţelelor, se pot trage şi diagonale ale pătrăţelelor sau ale micilor dreptunghiuri de pe hîrtie (fig. 48).

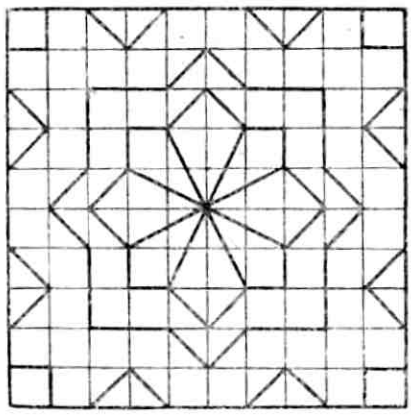


Fig. 48

Construcții analoge se pot face și pe hîrtie cu celule triunghiulare, care se obțin ușor din hîrtie cu liniatură de dictando : fie două puncte A și B (fig. 49) situate pe aceeași linie a unei hîrtii dictando ; să aflăm un punct C, astfel încît $AC=BC=AB$. Tăind hîrtia după dreapta AC, căpătăm o „riglă" confecționată prin mijloace proprii, împărțită pe margine în intervale de lungime a ; fixînd cu ajutorul

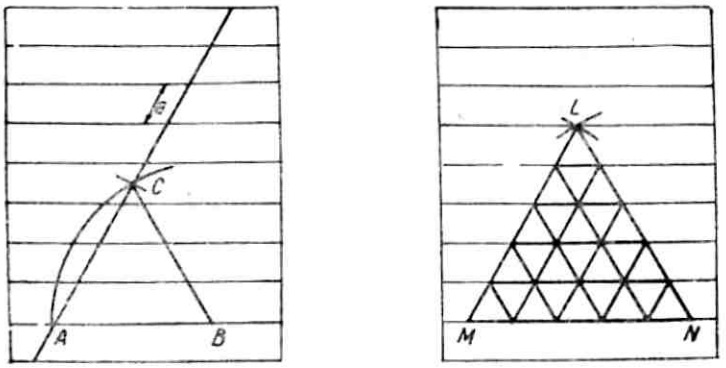


Fig. 49

ei segmentul $MN=na$ (fig. 49, $n=5$) pe o foaie de hîrtie nouă și împărțindu-l totodată în segmente de lungime a, construim triunghiul echilateral MNL, iar prin punctele de diviziune ale laturilor sale ducem drepte paralele cu laturile ML și NL.

Pentru construirea unui ornament pe rețeaua triunghiulară astfel obținută, este permis să fie duse liniile mijlocii ale triunghiurilor, ceea ce echivalează cu folosirea unei rețele avînd latura triunghiurilor egală cu $a/2$ (vezi fig. 50).

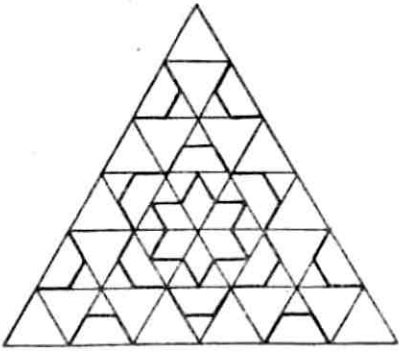
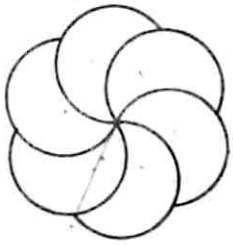


Fig. 50

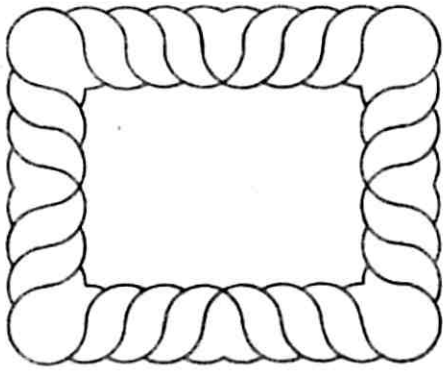
Luînd ca bază o rețea pătratică sau triunghiulară, încercați să organizați un concurs pentru obținerea celui mai frumos ornament, ținînd seama de originalitatea desenului, de precizia execuției și de calitatea corelației (trebuie stabilite dinainte dimensiunile desenelor, de exemplu, un dreptunghi din 12×20 celule, un pătrat din 10×10 celule, un hexagon cu latura $6a$).

Cu rigla și compasul

Folosind rigla și compasul putem construi cele mai variate figuri. Pentru aceasta să luăm un cerc împărțit în n părți egale (pentru $n=3, 4, 5, 6, 8, 10$ etc., aceasta se realizează ușor, iar pentru $n=7, 9, 11$ etc. și chiar pentru $n=5, 10$ se poate folosi raportorul). Pentru a ușura munca putem, după verificarea minuțioasă a construcției, să marcăm de mai multe ori cu



a)



b)

Fig. 51

ajutorul unui ac ascuțit centrul și vîrfurile unui poligon regulat pe o foaie de hîrtie curată. Ducînd prin punctele de diviziune ale cercului coarde de lungime egală, obținem diverse poligoane stelate regulate.

Dacă vom descrie acum cercuri (sau arce de cerc) de diverse raze cu centrul în vîrful poligoanelor regulate și în punctele de intersecție ale cercurilor, unind apoi diversele perechi de puncte prin segmente de dreaptă, putem obține numeroase figuri dintre cele mai variate care pot deveni și mai atrăgătoare printr-un colorit adecvat.

Ca „bază" pot fi folosite și alte figuri în afară de cerc : dreptunghiul, triunghiul etc. (vezi fig. 51).

Figuri simetrice

Două puncte A și A' se numesc *simetrice* în raport cu dreapta l, dacă A și A' sînt situate de o parte și de cealaltă a dreptei l, la distanțe egale, iar $AA' \perp l$.

O figură plană se numește *simetrică* în raport cu o dreaptă l, dacă pentru orice punct B al ei putem găsi un punct B' (aparținînd și el figurii) care să fie simetricul lui B în raport cu dreapta l. Dreapta l se numește axă de simetrie.

În fig. 52 sînt reprezentate figuri avînd respectiv una, două, trei, patru și cinci axe de simetrie.

Figurile cu mai multe axe de simetrie se decupează ușor din hîrtie : o foaie de hîrtie subțire se împăturește în două, apoi de încă n ori, sub forma unui „sector" cu unghiul la centru $180°/n$; dacă

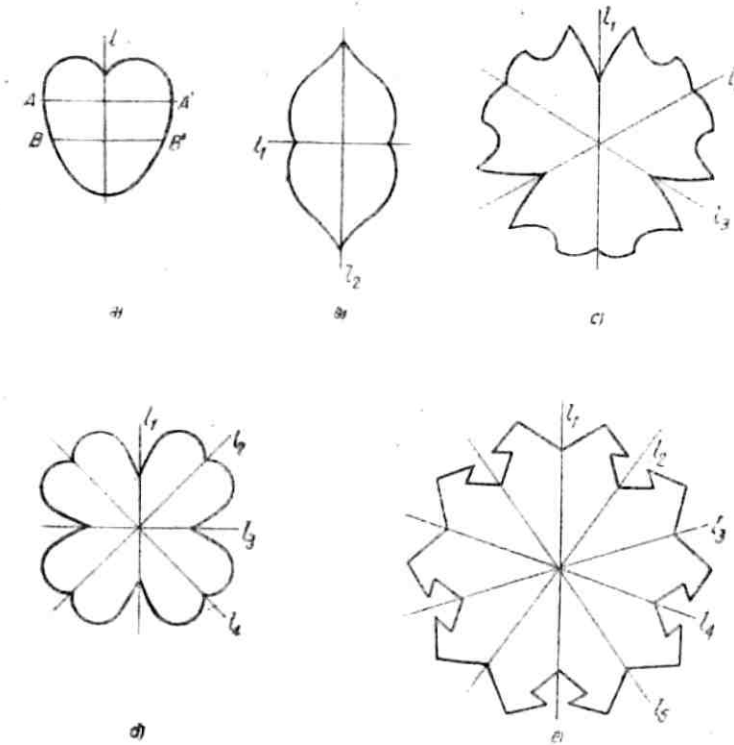


Fig. 52

vom tăia pe marginea sectorului un anumit contur, atunci, după ce desfacem hîrtia, vom obține o figură cu n axe de simetrie. Dacă folosim pentru aceasta hîrtie colorată, putem obține diverse șervețele ajurate cu ornamente interesante.

Vom spune că punctul O este *centrul de simetrie de ordinul n* pentru o figură dată, dacă rotind această figură în jurul punctului O cu unghiul $360°/n$, ea ajunge să coincidă cu ea însăși. De exemplu, în fig. 52, figurile *b*, *c*, *d*, *e* au centre de simetrie de ordinul 2, 3, 4 și 5 respectiv.

Pentru construirea unor figuri avînd un centru de simetrie de ordinul m, putem folosi un șablon de carton avînd forma unui „sector" cu marginea curbilinie și cu unghiul la centru de $360°/n$.

Să ducem pe o foaie de hîrtie, dintr-un punct O n raze care formează unghiuri de cîte $360°/n$. Aşezînd rînd pe rînd şablonul între fiecare pereche de raze vecine (astfel încît punctul O' să coincidă cu O) şi urmărind cu creionul „marginea exterioară a sectorului", obţinem o figură simetrică analogă celei din fig. 53, *a*.

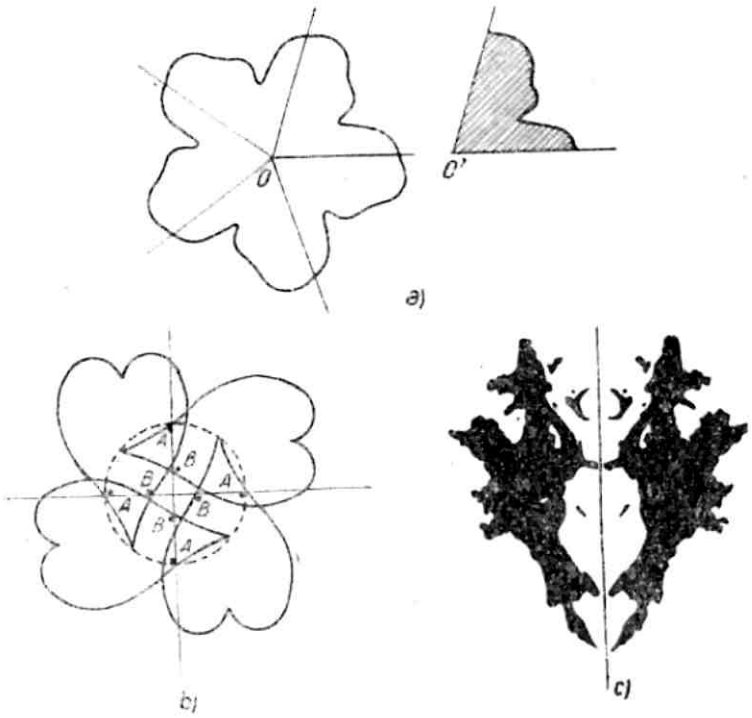


Fig. 53

Putem lua şi un şablon de formă arbitrară şi să-l aşezăm în acelaşi mod peste fiecare dintre razele menţionate mai sus, de exemplu astfel încît două dintre punctele sale A şi B să se afle pe fiecare dintre raze, la distanţe egale de punctul O (fig. 53, *b*).

Semnalăm şi un alt procedeu pentru construirea figurilor simetrice : prin imprimarea unei pete de cerneală pe ambele jumătăţi ale unei hîrtii împăturite după o linie dreaptă. În aceste condiţii, putem obţine cîteodată figuri dintre cele mai ciudate, avînd o singură axă de simetrie (fig. 35, *c*).

În fig. 54, *a* se vede că dacă aşezăm între vîrfurile unei stele cu şapte unghiuri, formată din şapte romburi de latură a şi de unghi ascuţit $\alpha = \frac{2\pi}{7}$, un al doilea rînd din şapte romburi de unghi $\beta = 2\alpha = \frac{4\pi}{7}$, iar în golurile noii stele aşezăm şapte romburi de unghi $\gamma = 3\alpha = \frac{6\pi}{7}$ obţinem un poligon regulat cu 14 laturi egale cu a.

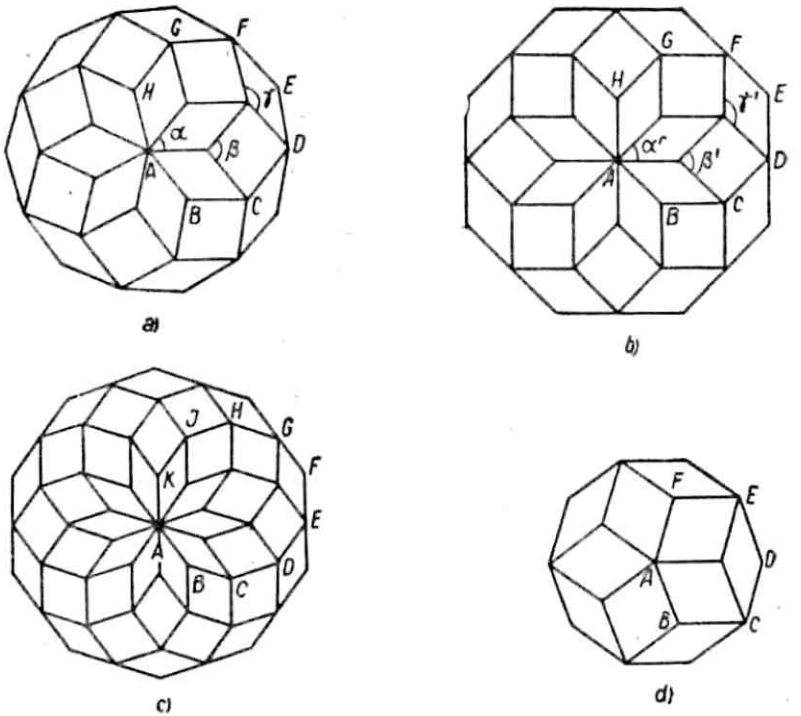


Fig. 54

Dacă luăm o stea octogonală (fig. 54, *b*), formată din opt romburi de unghi $\alpha' = \frac{2\pi}{8}$, vom avea în rîndul al doilea pătrate ($\beta' = 2\alpha' = \frac{\pi}{2}$) şi în rîndul al treilea, romburi egale cu cele din steaua centrată ($\gamma' = 3\alpha' = \pi - \alpha'$); toate cele trei rînduri de romburi formează un octogon regulat de latură $2a$.

Încercați să demonstrați că dacă $\alpha = \frac{2\pi}{m}$ și m este impar ($m \geqslant 3$), atunci $\frac{m-1}{2}$ rînduri de romburi formează un poligon regulat cu 2 m laturi egale cu a, iar dacă m este par ($m \geqslant 4$), atunci $\frac{m}{2} - 1$ rînduri de romburi formează un poligon regulat cu n laturi egale cu $2a$ [54]. Dat fiind că în fiecare rînd avem m romburi, rezultă de aici că pentru m impar, orice poligon regulat cu $2m$ laturi egale cu b, poate fi împărțit ori în $2m(m-1)$ romburi de latură $b/2$, ori în $\frac{m(m-1)}{2}$ romburi de latură b (vezi, de exemplu, *c*) și *d*) din fig. 54).

Observăm că împărțirea unui poligon regulat cu $2m$ laturi, egale cu $2a$, în romburi de latură a se poate obține rotind un poligon „mic" cu $2m$ laturi, de latură a în jurul unuia dintre vîrfurile sale, consecutiv cu unghiurile $\frac{\pi}{m}, 2\frac{\pi}{m}, 3\frac{\pi}{m} \ldots, (2m-1)\frac{\pi}{m}$ (vezi *ABCDEFGH* și *ABCDEFGHK* în fig. 54, *b*, *c*) ; poligonul „mic" cu $2m$ laturi pe care îl rotim este format din romburi egale cu ale poligonului mare, numai că el cuprinde de patru ori mai puține romburi de fiecare „fel" decît poligonul cel mare cu $2n$ laturi.

Împărțirea unui poligon regulat cu $2m$ laturi, egale cu a, în romburi de latură a (pentru m impar) se poate obține rotind cu $\frac{2\pi}{m}$, $2\frac{2\pi}{m}, \ldots, (m-1)\frac{2\pi}{m}$ radiani un poligon regulat cu $m+1$ laturi egale cu a, în care două unghiuri opuse sînt egale cu $\frac{\pi}{m}(m-1)$, iar fiecare din restul de $m-1$ unghiuri este egal cu $\frac{\pi}{m}(m-2)$ în jurul unui vîrf al unuia dintre unghiurile de $\frac{\pi}{m} m - 1)$ (vezi, de exemplu, octogonul *ABCDEFGH* din poligonul cu 14 laturi *a*) și hexagonul *ABCDEF* din decagonul *d*).

Pentru a obține, în cazul cînd m este impar, ca rezultat final un poligon regulat cu n laturi egale cu $2a$, trebuie să luăm ca figură centrală nu o stea formată din m romburi, ci un poligon stelat regulat cu m laturi, avînd unghiul din vîrf α egal cu $\frac{\pi}{m}$, unghiul din scobitură β egal cu $3\alpha = \frac{3\pi}{m}$ și „adîncimea scobiturii" $AB = a$ în fig. 55, *a*) și *b*) corespund cazurilor $m=7$ și $m=11$). Demon-

straţi că adăugarea a $\frac{m-3}{2}$ rînduri de romburi la un astfel de poligon conduce totdeauna la un poligon regulat cu m laturi egale cu $2a$[55]. Întreaga împărţire a poligonului cu m laturi în romburi cu un poligon stelat în centru se poate realiza cu ajutorul a m poligoane

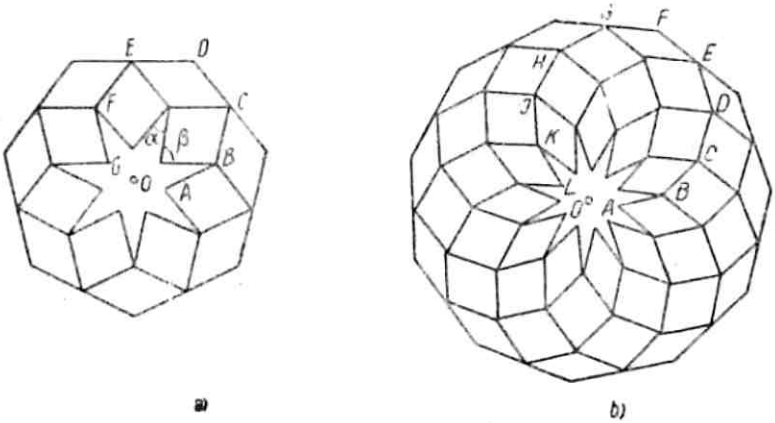


Fig. 55

regulate „deschise" mici (cum este $ABCDEFG$ din fig. 55, *a*) sau $ABCDEFGHIJK$ din fig. 55, *b*), care trec unul în altul dacă rotim figura în jurul centrului stelei cu unghiul de $2\pi/m$.

§ 25. CONSTRUIREA UNOR FIGURI DIN ELEMENTE DATE

Mozaicul

În jocul denumit „mozaic" se alcătuiesc diverse figuri dintr-o garnitură de plăci multicolore. De obicei, garniturile de plăci cuprind pătrate, romburi şi triunghiuri dreptunghice isoscele (fig. 56).

În cazul cel mai simplu, toate plăcile trebuie aşezate în conformitate cu ornamentele care însoţesc jocul. Dar, fără a respecta aceste desene şi fără a ne limita la forma de ansamblu a figurii, putem să căutăm figuri originale folosind fie toate plăcile care fac parte din garnitura jocului, fie numai unele dintre ele.

Poate că unii cititori vor reuşi să imagineze variante interesante ale jocului, în care garniturile de plăci vor conţine diverse triun-

ghiuri isoscele, paralelograme, poligoane regulate etc. Pentru realizarea variantelor imaginate se poate folosi un carton gros, peste care se lipește hîrtie lucioasă de diverse culori.

Dacă în locul plăcilor de carton sau de lemn confecționăm plăci multicolore subțiri din sticlă sau din material plastic transparent și admitem suprapuneri ale plăcilor, atunci putem realiza, chiar în condițiile unui mozaic bicolor, desene frumoase și variate, dacă le privim „la lumină".

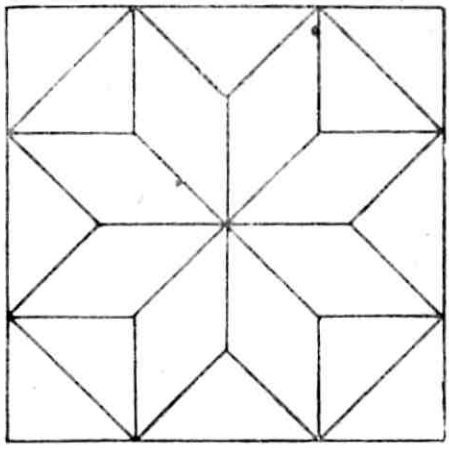
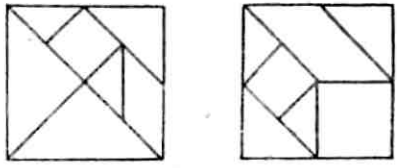


Fig. 56

Figuri din porțiuni de pătrat

Un joc util și distractiv este alcătuirea unor figuri din șapte porțiuni ale unui pătrat, tăiat cum se arată în fig. 57 ; la alcătuirea figurilor trebuie să fie folosite toate cele șapte porțiuni, fără ca ele să se suprapună nici măcar parțial.

În fig. 58 sînt reprezentate figuri simetrice. Încercați să obțineți aceste figuri din porțiunile de pătrat reprezentate în fig. 57, *a*.



a) *b)*

Fig. 57

Din aceleași porțiuni se pot alcătui și multe alte figuri (de exemplu, reprezentări a diverse obiecte, animale, etc.).

O variantă mai puțin răspîndită a jocului este alcătuirea de figuri prin porțiunile de pătrat reprezentate în fig. 57, *b*.

Organizați un concurs pentru imaginarea unor figuri putînd fi alcătuite din aceste porțiuni ; va ieși învingător cel care va întocmi mai repede figurile cerute de „adversar".

Nu veți putea oare să împărțiți în altfel un pătrat în șase porțiuni, astfel încît să se poată alcătui din ele diverse figuri simetrice ?

Dacă vrem, jocul poate fi complicat, imaginînd figuri care trebuie să fie alcătuite, de exemplu, din șase sau din cinci porțiuni de pătrat și fără a indica ce anume porțiuni trebuie folosite în aceste condiții.

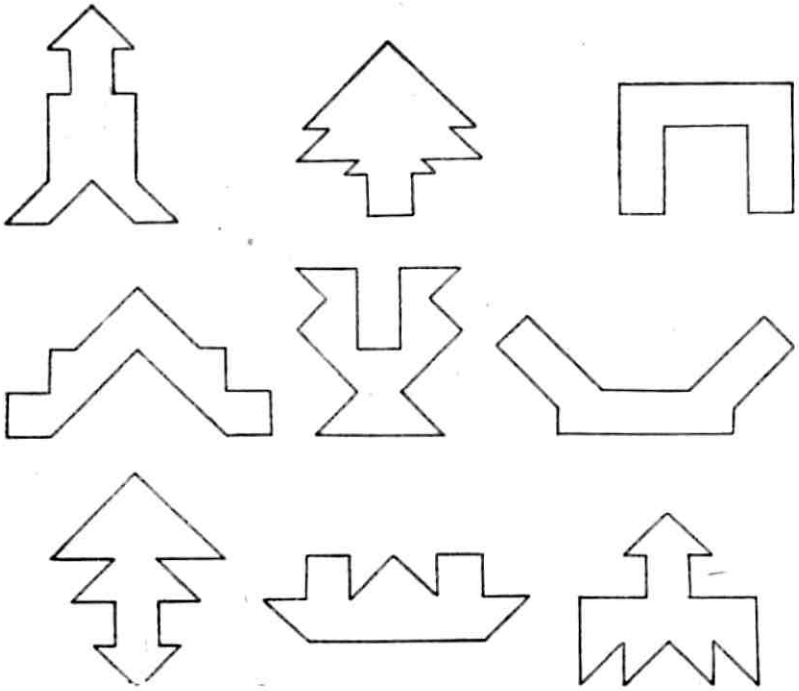


Fig. 58

Dreptunghiuri din pătrate

În ultimii 20 de ani au apărut în paginile unor reviste de matematică mai multe articole consacrate problemei alcătuirii unor dreptunghiuri din pătrate de mărimi diferite două cîte două.

S-a constatat că nu se poate forma un dreptunghi din n pătrate diferite, dacă $n < 9$. Pentru $n = 9$, problema are două soluții : putem alcătui un dreptunghi din pătrate ale căror laturi sînt în raportul 1 : 4 : 7 : 8 : 9 : 10 : 14 : 15 : 18 (fig. 59) și din pătrate ale căror laturi sînt în raportul 2 : 5 : 7 : 9 : 16 : 25 : 28 : 33 : 36. Formați [56] un dreptunghi din zece pătrate ale căror laturi sînt în raportul 3 : 11 : : 12 : 23 : 34 : 35 : 38 : 41 : 44 : 45 și un dreptunghi din treisprezece pătrate avînd raportul dintre laturi 1 : 4 : 5 : 9 : 14 : 19 : 33 : 52 : 56:

: 69 : 70 : 71 : 72 (este util să rezolvăm întîi problema raportului dintre laturi pentru fiecare dreptunghi pe care îl construim).

Numărul minim de pătrate diferite din care putem forma un pătrat mare este de 26. Alcătuiți un pătrat mare, ținînd seama că raportul dintre laturile pătratelor constitutive este 1 : 11 : : 41 : 42 : 43 : 44 : 85 : : 168 : 172 : 183 : 194 : : 205 : 209 : 5 : 7 : 20 : : 27 : 34 : 61 : 95 : 108 : : 113 : 118 : 125 : 136 : : 231, primele 13 pătrate formînd un dreptunghi cu raportul dintre laturi 608 : 377, iar ultimele 13 pătrate — un dreptunghi cu raportul dintre laturi 608 : 231 ([57]).

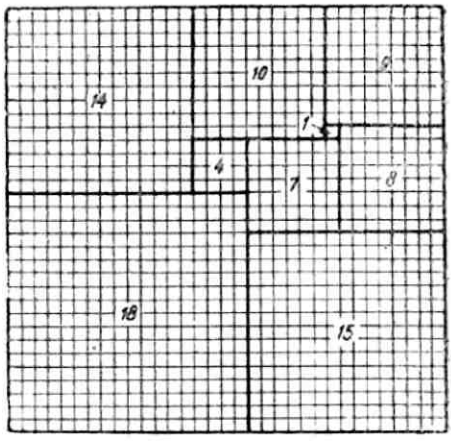


Fig. 59

Este interesant de menționat că problema alcătuirii unui paralelipiped dreptunghic dintr-un număr finit de romburi diferite este nerezolvabilă.

În adevăr, să presupunem că problema are soluție și că volumul celui mai mic cub este v. Deoarece, indiferent ce dreptunghi am considera, format din pătrate diferite, pătratul cel mai mic nu poate să fie alăturat la o latură a dreptunghiului (demonstrația [58]) înseamnă că cel mai mic dintre cuburi (C_1) care aderă la baza interioară a paralelipipedului va fi înconjurat de cuburi de dimensiuni mai mari ; cel mai mic dintre cuburile (C_2) situat pe fundul „puțului" astfel format, va fi și el înconjurat de cuburi mai mari (decît el), care formează un „puț", de secțiune mai mică etc.

În sfîrșit, printre cuburile C_1, C_2, C_3, ..., se vor găsi cuburi al căror volum este mai mic decît v, ceea ce contrazice ipoteza noastră inițială.

Rezolvați și următoarele două probleme :

1) Să se împartă un cub în n cuburi (dintre care unele pot fi și egale) pentru $n=34$ și pentru $n=50$ [59]. Încercați să stabiliți pentru ce valori ale lui n, problema nu are soluție.

2) Demonstrați [60] că pentru $n \neq 2, 3, 5$, un pătrat poate fi împărțit în n pătrate (dintre care unele pot fi și egale).

Un joc geometric interesant este alcătuirea de parchete sau parchetarea, cum vom denumi pe scurt acoperirea unui plan cu figuri de aceeași formă sau de cîteva forme date, care se succed în mod regulat.

Un exemplu de parchet foarte simplu este hîrtia cu pătrățele sau un plan acoperit cu triunghiuri echilaterale egale ; unind între ele, în diverse moduri, diversele celule pentru a forma complexe, obținem ușor o mulțime de parchete „derivate" dintre cele mai diferite. Diversitatea poate fi mărită dacă facem să crească unele din celelalte împărțindu-le în părți prin linii curbe sau frînte. În fig. 60 sînt reprezentate cîteva parchete derivate care se continuă nemărginit (propunem cititorului să se convingă de aceasta).

Se pot obține parchete derivate și din parchete formate din poligoane regulate cu număr de laturi diferit.

Pentru cercetarea problemei acoperirii unui plan cu poligoane regulate, trebuie să ținem seama, în primul rînd, de toate tipurile posibile de „noduri", adică trebuie să găsim diversele combinații de poligoane regulate ale căror vîrfuri se pot reuni într-un singur punct, astfel încît să acopere fără suprapuneri întreaga vecinătate, verificînd apoi în fiecare caz posibilitatea de a continua nemărginit parchetul cu noduri de tipul astfel găsit.

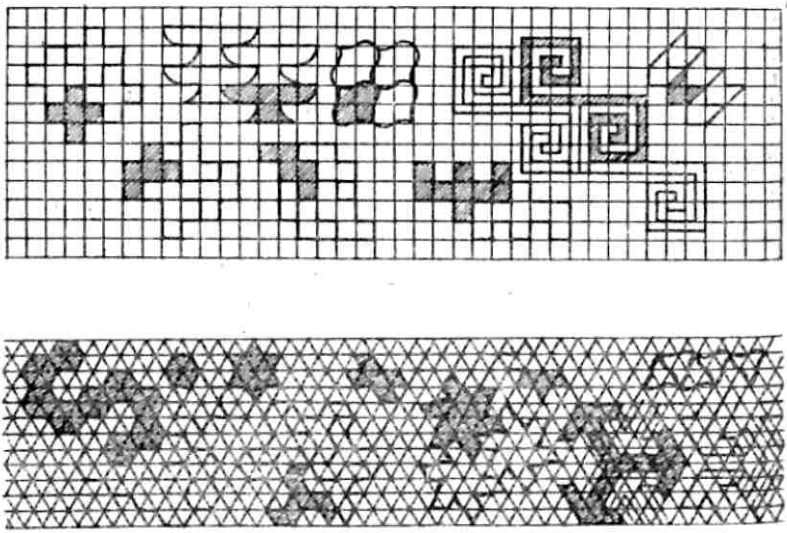


Fig. 60

De exemplu, ne convingem ușor că triunghiul echilateral, heptagonul regulat și poligonul regulat cu 42 de laturi pot da noduri, dar nu putem să umplem tot planul cu poligoane regulate care formează numai noduri de tipul (3, 7, 42). În adevăr, dacă în vîrful A (fig. 61) se întîlnesc triunghiul ABC, heptagonul S_1 și poligonul S_2 cu 42 de laturi, atunci în vîrful B trebuie să adere la triunghiul ABC și la poligonul cu 42 laturi heptagonul S_3, dar atunci punctul C nu va mai putea fi un nod de tipul (3, 7, 42).

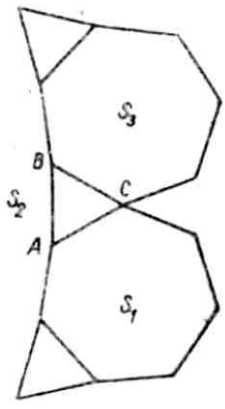


Fig. 61

Demonstrați că deși există noduri de tipul (5, 5, 10) nu este posibil să umplem tot planul cu pentagoane și cu decagoane regulate ([61]).

În căutarea diverselor tipuri de noduri trebuie să ținem seama că ordinul k al nodului (adică numărul de poligoane care se întîlnesc în el) nu poate fi mai mare decît șase. În afară de aceasta, dacă într-un nod de ordinul k se întîlnesc poligoane regulate cu n_1, n_2, ..., n_k laturi, se demonstrează ușor ([62]) că

$$k-2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_k}\right)=2.$$

De exemplu, pentru $k=3$, vom avea egalitatea $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$ care este satisfăcută de nodurile (8, 8, 4), (12, 12, 3), (10, 5, 5), (12, 6, 4), (6, 6, 6), (3, 7, 42) etc.

Pentru $k=4$, avem $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$; această condiție este satisfăcută de nodurile (6, 3, 4, 4), (6, 3, 6, 3) etc.

Este imposibil să epuizăm toate parchetele. În adevăr, luînd, bunăoară, o rețea triunghiulară și reunind în diverse moduri o parte a triunghiurilor în hexagoane, putem obține o infinitate de parchete construite din triunghiuri și hexagoane regulate (fig. 62).

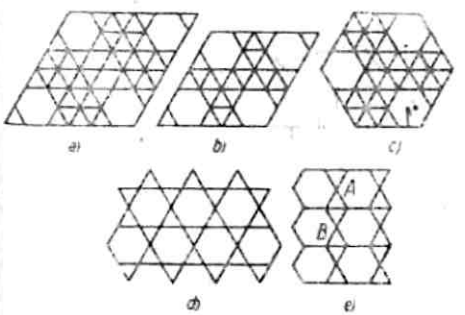


Fig. 62

De aceea este recomandabil ca, în construirea parchetelor, să ne mărginim la condiții mai mult sau mai puțin rigide. De exemplu, putem cere ca ansamblul poligoanelor care înconjoară orice nod

al parchetului să fie același pentru toate nodurile. Condiția aceasta nu este satisfăcută de parchetele *a*), *b*) și *c*), deoarece ele au unele noduri de ordinul 5, iar altele de ordinul 6 ; condiția este în schimb îndeplinită de parchetele *d*) și *e*).

Dacă mai impunem condiția suplimentară ca poziția relativă a poligoanelor care se întîlnesc într-un anumit nod al parchetului să

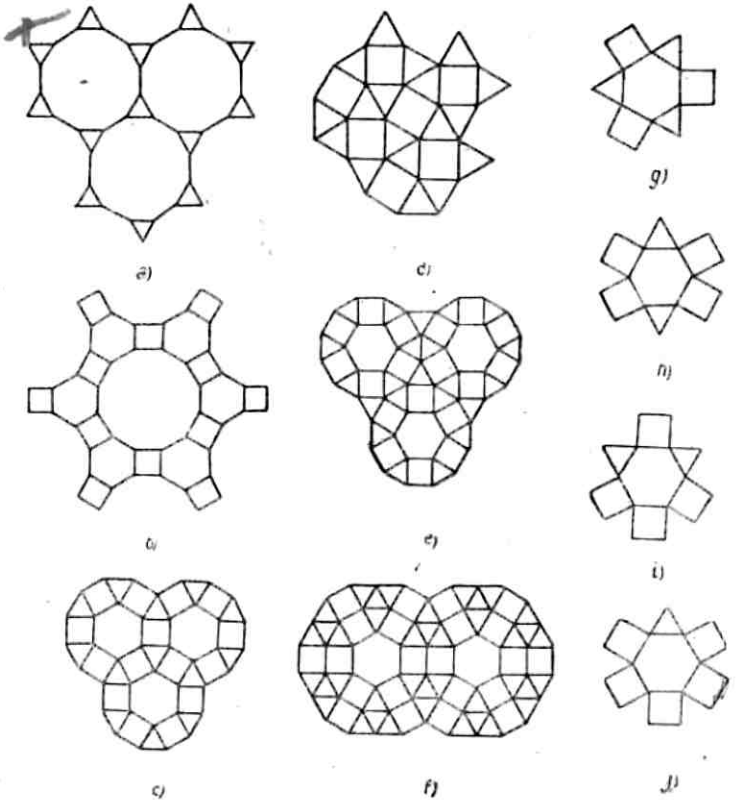


Fig. 63

fie aceeași pentru toate nodurile, atunci parchetul e) va trebui „rebutat", deoarece în nodul *A* triunghiurile și hexagoanele se întîlnesc alternînd, pe cînd în nodul *B* cele două hexagoane sînt așezate unul lîngă altul.

Putem cere ca toate poligoanele de același fel din cadrul parchetului să fie de același tip în sensul că orice pereche de poligoane de același fel ale parchetului, împreună cu poligoanele care aderă la ele, să poată fi perfect suprapuse unele peste altele (vezi *a*), *b*), *c*), *d*) în fig. 63), sau putem admite folosirea unor poligoane de

două tipuri diferite (cum este cazul în parchetul *e*), unde toate pătratele și toate hexagoanele sînt de același tip, pe cînd triunghiurile nu sînt de același tip, deoarece unele triunghiuri se învecinează cu cîte trei pătrate, pe cînd altele cu două pătrate și cu un triunghi).

Din *c*), *g*), *h*), *i*), *j*) fig. 63 se vede că există cinci variante de a înconjura un hexagon regulat cu pătrate și cu triunghiuri echilaterale, cu condiția ca toate cele șase vîrfuri ale hexagonului să fie noduri de ordinul 4, iar două hexagoane să nu aibă nici măcar un vîrf comun.

Încercați să vedeți ce tipuri de hexagoane se pot întîlni concomitent într-un parchet nemărginit, cum se vor învecina unele cu altele și dacă în afară de parchetul *c*) mai există și altele în care hexagoanele să fie de același tip.

Din compararea figurilor *a*), *b*), *c*), *e*), *f*) reiese că din parchetele în care intervin dodecagoane regulate putem obține noi parchete (dacă împărțim dodecagoanele în părți componente).

Reunind în parchetul *f*) fiecare ansamblu de 4 triunghiuri vecine și, respectiv, fiecare pereche de pătrate, pentru a forma complexe, căpătăm un parchet, în care toate celulele și toate nodurile sînt de același tip, în schimb vor apărea „celule neregulate" (dreptunghiuri formate din cîte două pătrate).

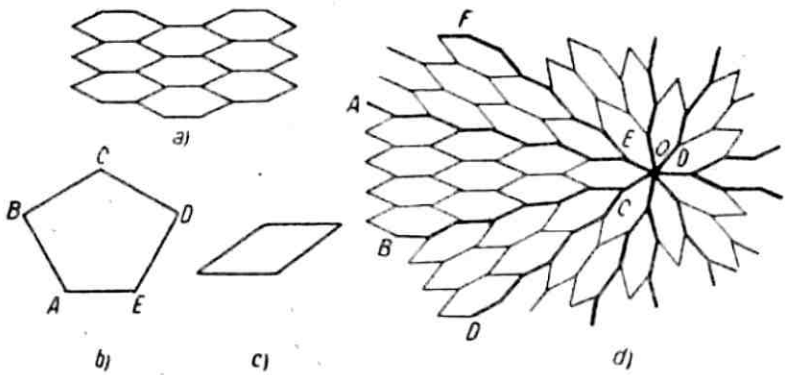


Fig. 64

Menționăm o proprietate interesantă a hexagoanelor care au două unghiuri opuse egale cu cîte $360°/n$ (n este un număr natural arbitrar), iar celelalte patru unghiuri egale. Din astfel de plăci, putem obține, în afară de parchetul a) (fig. 64) cu celulele dispuse paralel, și parchetul *d*) unde celulele umplu n „sectoare" de forma AOB care

converg în centrul O (în figura noastră, $n=7$), și n sectoare similare BCD, AEF..... ale căror vîrfuri rămîn la o anumită distanță de centru.

Din pentagoane regulate, combinate cu decagoane și cu pentagoane stelate, se pot forma parchete interesante cu un mare număr de celule, dar aceste parchete nu pot fi continuate nemărginit.

Se poate obține un parchet nemărginit [63] din pentagoane regulate, combinate cu romburi de forma *c*), la care unghiul ascuțit este de 36°, precum și numai din pentagoane de forma *b*) în care unghiurile din vîrfurile B și D sînt drepte, iar celelalte au cîte 120° și totodată $AB=BC=CD=DE$.

Parchetarea și, cu atît mai mult studiul ei, sînt accesibile persoanelor cu o oarecare pregătire matematică ; în schimb, colorarea unui parchet gata alcătuit, reunirea în complexe a celulelor sale și chiar schimbarea formei diverselor celule a unui parchet gata construit nu cer aproape nici un fel de pregătire matematică.

Parchete bicolore

Luînd un anumit complex din patru pătrate, de exemplu $ABCD$ din fig. 65, *a*, putem adăuga la el (în dreapta sau jos) trei alte complexe în așa fel încît să obținem un parchet simetric cu 16 celule, avînd o axă de simetrie orizontală (AE) și una verticală (CF).

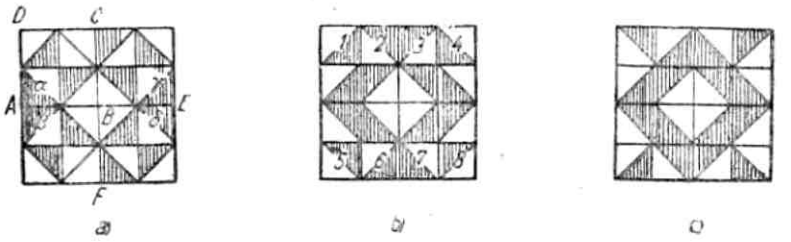
Putem lua complexe nu numai din patru celule, ci și din nouă, din șasesprezece, din douăzeci și cinci celule etc.

Deoarece din n^2 pătrate putem alcătui 4^{n^2} complexe distincte, înseamnă că pentru $n>2$ este practic imposibil să epuizăm mulțimea de parchete simetrice construite din $4n^2$ pătrate.

Dacă într-un parchet simetric, patru pătrate oarecare, dispuse simetric în raport cu cele două axe de simetrie ale pătratului mare, de exemplu, pătratele α, β, γ, δ din fig. 65 sînt permutate între ele în direcție orizontală, fără a schimba orientarea pătratelor deplasate (adică dacă facem transpozițiile (α, γ) și (β, δ) sau în direcție verticală (transpozițiile (α, β) și (γ, δ)), obținem iarăși un parchet simetric. Astfel, transpozițiile orizontale (α, γ) și (β, δ) transformă parchetul *a*) în parchetul *b*), iar acesta, prin transpozițiile verticale (1, 5), (2, 6), (3, 7) și (4, 8), trece în parchetul *c*).

Vom spune că două parchete sînt *înrudite*, sau că *aparțin aceleeași clase*, dacă putem trece de la unul la celălalt prin cîteva transpoziții

ale unor şiruri paralele de celule, dispuse simetric în raport cu axa de simetrie verticală, sau cu cea orizontală a parchetului. De exemplu, vor aparţine aceleeaşi clase parchetele *b*) şi *c*) din fig. 65, deoarece se obţin unul din altul prin transpoziţia rîndului orizontal de sus cu cel orizontal de jos.



a) b) c)

Fig. 65

Nu veţi reuşi oare să determinaţi pentru $n=2, 3, 4,...$ în cîte clase distincte se împarte mulţimea de parchete simetrice cu mai multe celule formate din $4n^2$ pătrate ?

Se pot construi şi parchete hexagonale din triunghiuri bicolore sau tricolore (vezi fig. 66, *a*, *b*).

Alcătuind din 4 (9, 16, în general din n^2) triunghiuri de forma *a*) un triunghi echilateral mare *ABC* (fig. 66, *c*, unde $n=2$).

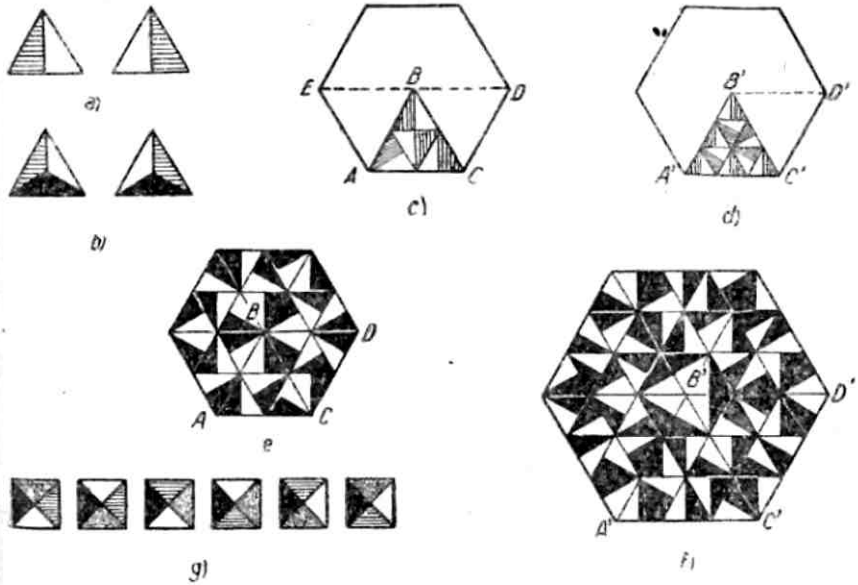


Fig. 66

sau $A'B'C'$ (fig. 66, *d*, unde $n=3$), şi reflectîndu-l în raport cu laturile BC (respectiv $B'C'$) iar apoi reflectînd rombul obţinut $ABCD$ ($A'B'D'C'$) în raport cu AB şi cu BD (cu $A'B'$ şi cu $B'D'$), obţinem un hexagon regulat cu trei axe de simetrie (vezi *e*) şi *f*)), format din $6n^2$ triunghiuri mici bicolare.

Dacă veţi încerca să efectuaţi simetriile în altă ordine (întîi triunghiul ABC faţă cu latura AB, şi apoi rombul obţinut, faţă de laturile BE şi BC) se va obţine acelaşi hexagon (demonstraţi !) ([64]).

Se pot obţine cele mai variate parchete pătrate cu desene ciudate din $4n^2$ plăci cu cîte patru culori; dat fiind că patru triunghiuri avînd vîrful comun în centrul unui pătrat pot fi colorate în şase feluri diferite (vezi fig. 66, *g*), putem conveni să folosim pătrate de toate cele şase tipuri, fie să introducem anumite restricţii.

§ 27. RECONSTITUIREA FIGURILOR

Două figuri (vom înţelege prin aceasta două figuri plane sau două corpuri) se numesc *egal constituite* dacă una dintre ele poate fi descompusă în părţi care, reunite altfel între ele, ne dau a doua figură.

Vom denumi acest proces *reconstituirea* unei figuri din cealaltă.

Teorema 1. *Dacă fiecare dintre figurile A şi B este egal constituită cu o figură C, atunci şi figurile A şi B sînt egal constituite.*

În adevăr, dacă figura C (fig. 67) este tăiată prin linii continue (iar pentru corpuri, prin suprafeţe) în părţi, din care se poate constitui figura A, iar prin liniile punctate în părţi care dau figura B, atunci mulţimea tuturor părţilor numerotate în care figura C este tăiată de cele două feluri de linii, reprezintă un ansamblu de bucăţi, care, reunite în grupurile 1, 2, 3, 4, 5 etc., formează figura A, iar reunite în grupurile 1, 3, 12 ; 2, 4, 6, 9 etc., dau figura B. Este cu totul evidentă.

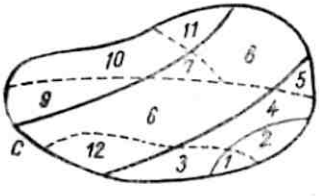


Fig. 67

Teorema II. *Oricare două figuri egal constituite sînt echivalente, adică au aceeaşi arie.*

Reciproca nu este adevărată, adică din echivalenţa a două figuri nu rezultă, în general, că ele sînt şi egal constituite.

Dăm mai jos cîteva probleme referitoare la unele cazuri speciale cînd echivalenţa a două figuri implică faptul că sînt egal constituite.

Teorema III. *Paralelogramele avînd bazele egale şi înălţimile egale sînt egal constituite* (vezi fig. 68, *a*).

Teorema IV. *Oricare două dreptunghiuri echivalente sînt egal constituite.*

(Folosind condiţia $ab=cd$, să se arate că $AB \parallel CD \parallel LM$ (fig. 68, *c*) ; ducînd $EKF \parallel AB$, se vede uşor că $S_1=S_1'$; $S_2=S_2'$, iar S_3 şi S_3' sînt egal constiuite.

Teorema V. *Oricare două paralelograme echivalente sînt egal constituite.*

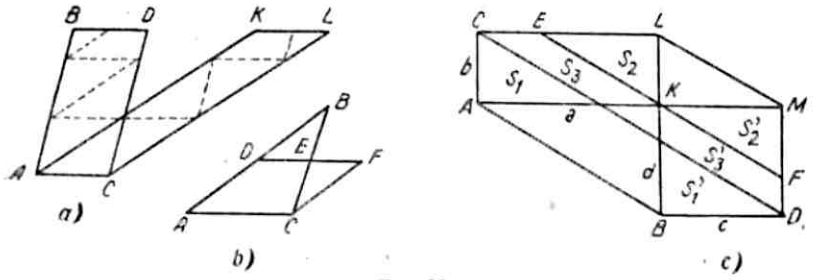


Fig. 68

(Pe baza teoremei III, fiecare dintre aceste paralelograme este egal constituit cu un dreptunghi; ne mai rămîne să aplicăm teoremele I şi IV).

Teorema VI. *Oricare triunghi şi dreptunghi echivalente sînt egal constituite.*

(Trebuie să ţinem seamă că orice triunghi *ABC* este egal constituit cu un anumit paralelogram *ADFC*, fig. 68, *b*).

Teorema VII. *Oricare două poligoane echivalente sînt egal constituite* (teorema lui Bolyai-Gervin).

În adevăr, descompunînd fiecare dintre poligoanele P şi Q în triunghiuri ($p_1, p_2, \ldots, p_m$, respectiv $q_1, q_2, \ldots, q_n$) este suficient să reconstituim toate triunghiurile în dreptunghiuri ($p_1', p_2', \ldots, p_m'$ şi $q_1', q_2', \ldots, q_n'$) de înălţime totală h,

Dreptunghiul de înălţime h format din $p_1', p_2', \ldots, p_m'$ (el poate fi format şi din $q_1', q_2', \ldots, q_n'$) va fi egal constituit cu P şi cu Q.

După cum vedem, reciproca teoremei II este valabilă pentru orice poligoane.

În secolul trecut s-au făcut încercări de a demonstra că o teoremă analogă teoremei lui Bolyai-Gervin va fi adevărată şi pentru poliedre. Însă în 1901, matematicianul german Dehn a demonstrat că un cub echivalent cu un tetraedru regulat nu sînt egal constituite.

Dacă însă ne limităm la poliedre de formă specială, atunci în anumite cazuri echivalența implică egala constituire. De exemplu,

Teorema VIII. *Paralelipipedele dreptunghice echivalente sînt egal constituite.*

Să notăm cu P și Q aceste paralelipipede dreptunghice. Fie a, b, c muchiile lui P și a_1, b_1, c_1 muchiile lui Q și fie $abc = a_1b_1c_1$. Să luăm paralelipipedul dreptunghic auxiliar R de muchii a_1, b', c unde $a_1b' = ab$ și $b'c = b_1c_1$; se demonstrează ușor că P și R sînt egal constituite (au înălțimile c egale și bazele echivalente), la fel ca și Q și R.

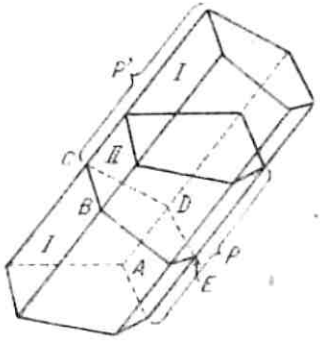


Fig. 69

Teorema IX. *Orice prismă poate fi reconstituită într-un paralelipiped dreptunghic.*

În adevăr, fie P o prismă oblică avînd muchia laterală l. Să luăm secțiunea $ABCDE$, perpendiculară pe muchiile laterale. Atunci din porțiunile I și II (fig. 69), vom constitui prisma dreaptă P', de înălțime l și cu baza $ABCDE$ (dacă nu putem efectua o secțiune perpendiculară pe muchiile laterale, încît să taie toate muchiile laterale ale prismei — pentru că prisma este prea lată și scurtă — atunci ea poate fi descompusă în prealabil în prisme înguste cu baze mai mici, iar fiecare dintre ele să fie reconstituite în modul arătat pentru a da o prismă dreaptă). Conform teoremei VII, împărțind poligonul $ABCDE$ în porțiunile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, el poate fi reconstituit într-un dreptunghi; prin urmare, din prismele drepte cu bazele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ și de înălțime l, în care se descompune P', putem constitui paralelipipedul dreptunghic P'', de înălțime l.

Teorema X. *Oricare două prisme echivalente arbitrare sînt egal constituite.* (Aceasta este o consecință a teoremelor VIII și IX.)

Problemele în legătură cu reconstituirea figurilor sînt însoțite uneori de indicarea numărului de părți în care trebuie descompusă figura considerată. De exemplu:

1) Împărțind dreptunghiul de 9×16 cm^2 în două părți, să-l reconstituim într-un pătrat ([65a]).

2) Descompunînd dreptunghiul de $a \times b$ cm^2 în două părți, să-l reconstituim în dreptunghiul $\frac{an}{n+1} \times \frac{b(n+1)}{n}$ cm^2 (n este un număr natural) ([65b]).

3) Împărțind paralelipipedul dreptunghic de $8 \times 8 \times 27$ cm^3 în patru părți, să-l reconstituim într-un cub cu latura de 12 cm (vezi fig. 70).

Încercați să confecționați modele de carton pentru cele patru părți potrivite atît pentru a constitui cubul cu latura de 12 cm cît și paralelipipedul de $8 \times 8 \times 18$ cm^3.

4) Împărțind paralelipipedul dreptunghic de $a \times b \times c$ cm^3 în patru părți, reconstituiți-l în paralelipipedul de $\frac{am}{m+1} \times \frac{b(m+1)n}{m(n+1)} \times \frac{c(n+1)}{n}$ cm^3 (m și n sînt întregi), sau în paralelipipedul $\frac{amn}{(m+1)(n+1)} \times \frac{b(m+1)}{m} \times \frac{c(m+1)}{n}$ cm^3 [66].

5) În fig. 71 se arată cum trebuie tăiat în două bucăți un covor (*a*) și o bucată de mușama cu pătrățele (*b*) pentru ca din bucățile obținute să se poată scoate, în primul caz, un covor de formă pătrată, iar în al doilea să se poată constitui o tablă de șah.

Încercați să imaginați probleme analoge, în care părțile componente să aibă cîte trei, cîte patru, cîte șase dinți.

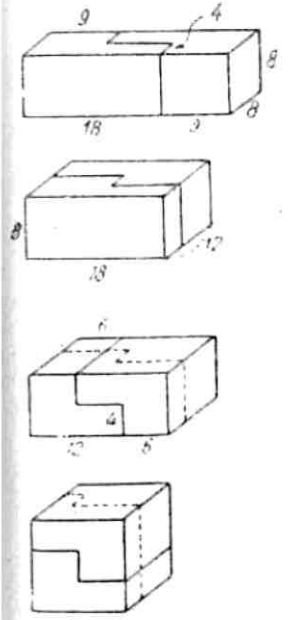


Fig. 70

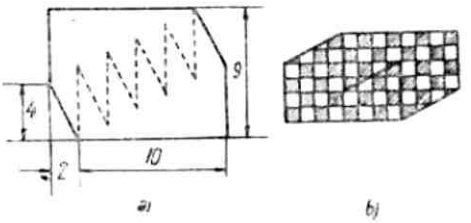


Fig. 71

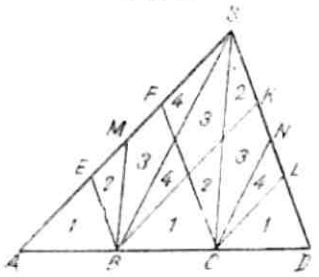


Fig. 72

6) Triunghiurile *ASB*, *BSC*, *CSD* (fig. 72) au vîrful comun *S* și baze egale situate pe aceeași dreaptă și vecine. ($AB = BC = CD$).

Demonstrați că fiecare dintre ele este constituit din aceeași mulțime de bucăți numerotate cu cifrele 1, 2, 3, 4 ($BK \parallel CL \parallel AS$; $BE \parallel CF = DS$; $BM \parallel CS$; $CN \parallel BS$).

Cercetați problema analogă pentru n triunghiuri ($n=4, 5, 6, \ldots$) avînd un vîrf comun și baze egale, vecine, situate pe aceeași dreaptă, presupunînd că ele sînt împărțite în bucăți prin drepte care trec prin vîrfurile bazelor triunghiurilor și sînt paralele cu celelalte laturi ale tuturor triunghiurilor.

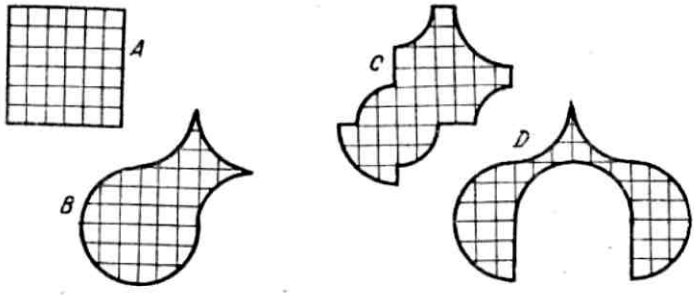


Fig. 73

7) Pătratul A (fig. 73) să fie reconstituit ([67]) în figurile B, C, D, tăindu-l în primele două cazuri în trei bucăți, iar în ultimul caz, în patru.

Observație. În cercul matematic puteți organiza un concurs pentru imaginarea unor figuri interesante constituite dintr-un anumit număr de porțiuni de pătrat sau altă figură dată (cerc, hexagon regulat etc.).

În fig. 74 se arată cum putem compune din șase bucăți numerotate ale pentagonului regulat $ABCDE$, de latură a, triunghiul echilateral de latură $b=a\sqrt{\frac{5}{\sqrt{3}\ \mathrm{tg}36^\circ}} \approx a\cdot 1{,}993$. Construcțiile sînt următoarele :

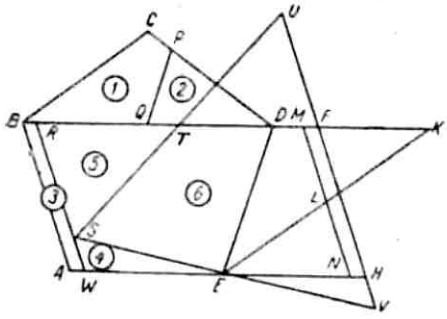


Fig. 74

1) DK este prelungirea lui BD și $DK=DE$, adică $\triangle EDK=\triangle BCD$;

2) $EL=LK$; $MN \parallel AB$; $CP=DM$; $BQ=EL$, adică patrulaterul $EDML=$ patrulaterul $BCPQ$ și $\triangle QPD=$ $=\triangle LMK=\triangle LNE$;

3) $ET = b/2 = ES = TS = TU = EV$, adică triunghiul echilateral SUV este echivalent cu pentagonul $ABCDE$;

4) $RW \parallel UV$ (însă RW și AB nu sînt paralele !), deci $\Delta TUF = \Delta TSR$ și $\Delta EHV = \Delta EWS$. În afară de aceasta, din echivalența patrulaterelor $ABRW$ și $NMFH$, avînd laturile respectiv paralele, rezultă că ele vor coincide prin suprapunere.

Încercați să reconstituiți dintr-un hexagon regulat un triunghi echilateral sau un pătrat, un hexagon regulat și un octogon regulat etc. Aici trebuie să vă străduiți să fie cît mai puține bucăți, iar dimensiunile fiecăruia dintre ele să nu fie prea mici.

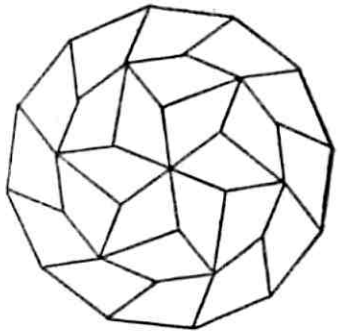


Fig. 75

Poate că, folosind teorema I, veți izbuti să găsiți o metodă de a împărți în bucăți nu prea mici un triunghi (un hexagon etc.), din care să alcătuiți apoi un pătrat și un pentagon regulat (sau un pătrat și un heptagon regulat etc.). Aceasta v-ar pune în fața unei probleme interesante: dintr-o mulțime de bucăți date, să se alcătuiască oricare dintre trei poligoane regulate dinainte stabilite.

În fig. 75 se vede că un dodecagon regulat poate fi împărțit în porțiuni egale astfel încît din numărul dublu de bucăți să se construiască apoi un dodecagon de arie dublă.

Cercetați următoarea problemă: pentru ce valori ale lui n și k poate fi tăiat un poligon cu n laturi în bucăți egale (al căror număr să fie cît se poate de mic) astfel încît din k garnituri de bucăți de acest fel să putem alcătui o figură asemenea cu cea dată și avînd aria de k ori mai mare.

Nu veți reuși oare să tăiați un pătrat în n bucăți astfel ca eliminînd una, iar apoi două dintre ele (poate chiar și trei !) să se poată constitui din bucățile rămase de fiecare dată cîte un pătrat de dimensiuni mai mici ?

Problema analogă se poate pune pentru triunghiul echilateral, pentru pentagonul regulat etc.

Amatorii de figuri geometrice frumoase se pot ocupa de construirea în coordonate polare a unor curbe corespunzînd ecuațiilor de forma: $r=a+b\sin\frac{m\varphi}{n}$, unde a, b, m, n sînt numere date.

În coordonate polare, alegem un segment e egal cu unitatea, un pol O și o axă polară Ox (fig. 76). Poziția oricărui punct M este determinată de raza polară OM și de unghiul polar φ, format de raza OM și de axa Ox. Numărul r, care exprimă lungimea lui OM prin intermediul lui e ($OM=re$) și valoarea numerică a unghiului φ exprimată în grade sau în radiani, se numesc *coordonatele polare ale punctului* M.

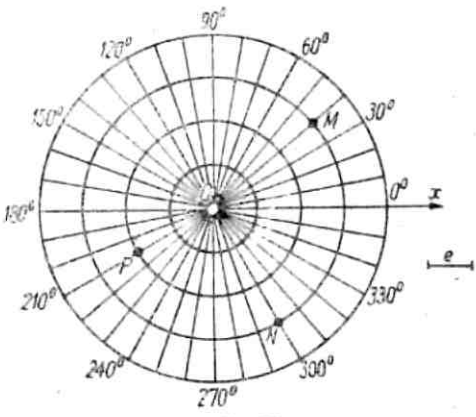


Fig. 76

Pentru orice punct distinct de polul O, putem considera $0\leqslant\varphi<2\pi$ și $r>0$. Însă la construirea curbelor corespunzătoare ecuațiilor de forma $r=f(\varphi)$, este natural să atribuim variabilei φ orice valori (inclusiv valori negative și valori mai mari decît 2π), iar r poate fi atît pozitiv cît și negativ.

Pentru a găsi punctul (φ, r), ducem din punctul O raza care formează unghiul φ cu axa Ox și luăm pe ea (pentru $r>0$) sau pe prelungirea ei în sensul opus (pentru $r<0$) segmentul $|r|e$.

Totul se va simplifica sensibil, dacă în prealabil vom construi o rețea de coordonate, formată din cercuri concentrice de raze e, $2e$, $3e$ etc. (avînd centrul în polul O) și din raze pentru care $\varphi=0°$, $10°$, $20°$,..., $340°$, $350°$; aceste raze vor fi adecvate și pentru $\varphi<0°$ și pentru $\varphi>360°$; de exemplu, pentru $\varphi=740°$ și pentru $\varphi=-340°$, ajungem pe raza pentru care $\varphi=20°$ (vezi în fig. 76, punctele M (40°, 3), N (120°, — 3), P (— 1230°, 2).)

Să considerăm curbele

I. $r=\sin 3\varphi$,

II. $r=\frac{1}{2}+\sin 3\varphi$,

III. $r=1+\sin 3\varphi$,

IV. $r=\frac{3}{2}+\sin 3\varphi$.

Să întocmim tabela:

φ	$-30°$	$-20°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$
$\sin 3\varphi$	-1	$-0{,}87$	$-0{,}5$	0	0,5	0,87	1
$\frac{1}{2}+\sin 3\varphi$	$-0{,}5$	$-0{,}37$	0	0,5	1	1,37	1,5
$1+\sin 3\varphi$	0	0,13	0,5	1	1,5	1,87	2
$\frac{3}{2}+\sin 3\varphi$	0,5	0,63	1	1,5	2	2,37	2,5

φ	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$	
$\sin 3\varphi$	0,87	0,5	0	$-0{,}5$	$-0{,}87$	-1	
$\frac{1}{2}+\sin 3\varphi$	1,37	1	0,5	0	$-0{,}37$	$-0{,}5$	
$1+\sin 3\varphi$	1,87	1,5	1	0,5	0,13	0	
$\frac{3}{2}+\sin 3\varphi$	2,37	2	1,5	1	0,63	0,5	

$\left(\text{Aici } 0{,}87 \text{ este valoarea aproximativă a numărului } \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vom denumi sector (α, β) partea din plan pentru punctele cărora avem $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Unind punctele $(0°, 0)$, $(10°; 0{,}5)$, $(20°. 0{,}87)$, $(30°, 1)$, $(40°; 0{,}87)$, $(50°; 0{,}5)$, $(60°, 0)$ printr-o curbă continuă, vom obține în sectorul $(0°, 60°)$ „petala pozitivă" (*1*) a curbei *I* (vezi fig. 77, *a*).

Continuînd tabela pînă la $\varphi = 360°$ și unind în desen punctul $(60°, 0)$, $(70°, -0{,}5)$, $(80°; -0{,}87)$, $(90°, -1)$, $(100°; -0{,}87)$, $(110°; -0{,}5)$, $(120°, 0)$, situate în sectorul $(240°, 300°)$, vom obține în acest sector „petala negativă" $(\overline{2})$ a curbei *I*.

Este ușor de urmărit că după ea vom obține „petala pozitivă" (*3*) din sectorul $(120°, 180°)$, „petala negativă" $(\overline{4})$ din sectorul $(0, 60°)$, petala pozitivă (*5*) din sectorul $(240°, 300°)$ și, în sfîrșit, petala negativă $(\overline{6})$ din sectorul $(120°, 180°)$.

La curba *1*, buclele (*1*) și $(\overline{4})$, $(\overline{2})$ și (*5*), (*3*) și $(\overline{6})$ coincid două cîte două. Însă din următoarele trei linii ale tabelei se vede că

1) la curba *II* (linia tabelei corespunzătoare lui $r = \frac{1}{2} + \sin 3\varphi$) prima buclă pozitivă (*1*) se situează în sectorul $(-10°, 70°)$ (cea mai mare valoare este $r = 1{,}5$), bucla negativă care îi urmează $(\overline{2})$ se află în sectorul $(250°, 290°)$ (valoarea cea mai mare este $|r| = 0{,}5$), etc., (vezi fig. 77, *a*).

2) curba *III* va avea numai bucle pozitive în sectoarele (— 30°, 90°), 90°, 210°) și (210°, 330°) (fig. 77, *b*).

3) curba *IV* va avea valoarea cea mai mică $r=0{,}5$, iar buclele vor avea o „formă neterminată" (fig. 77, *b*).

Situația va fi cu totul analogă pentru curbele

$$r=a+\sin\frac{5\varphi}{3} \text{ pentru } a=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}.$$

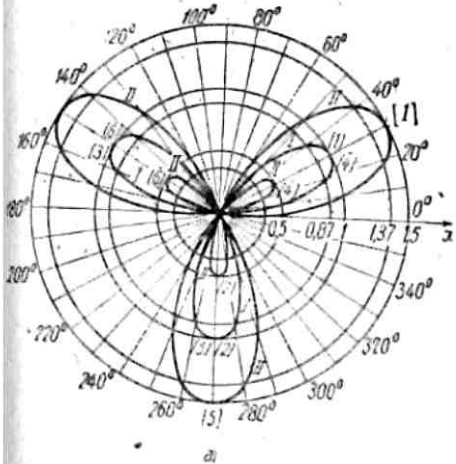
Aici este comod să variem unghiul φ din 18 în 18° (de la 0 pînă la 1 080°). Pentru $a=0$, prima buclă (pozitivă) și a doua (negativă) vor fi dispuse în sectoarele (0°, 108°) și (288°, 396°) (fig. 78, *a*), iar pentru $a=\frac{1}{2}$, în sectoarele (— 18°, 126°) și (306°, 378°) (fig. 78, *b*). Pentru $a=1$, vom avea numai cinci bucle pozitive în sectoarele (— 54°, 162°), (162°, 378°) etc.; situația va fi aceeași, însă cu „bucle neterminate" pentru $a=3/2$ (fig. 78, *c*).

În cazul general, curba $r=\sin\frac{m\varphi}{n}$ va avea prima buclă pozitivă în sectorul $\left(0°, \frac{180°n}{m}\right)$, deoarece în acest sector $(0° \leqslant \frac{m\varphi}{n} \leqslant 180°$. Pentru $\frac{1}{2}<\frac{m}{n}<1$, bucla va ocupa un sector mai mare de 180°, dar mai mic de 360°, iar pentru $\frac{m}{n}<\frac{1}{2}$ va fi nevoie pentru o singură buclă, de un „sector" mai mare de 360° (în fig. 79 este reprezentată forma buclelor pentru $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$).

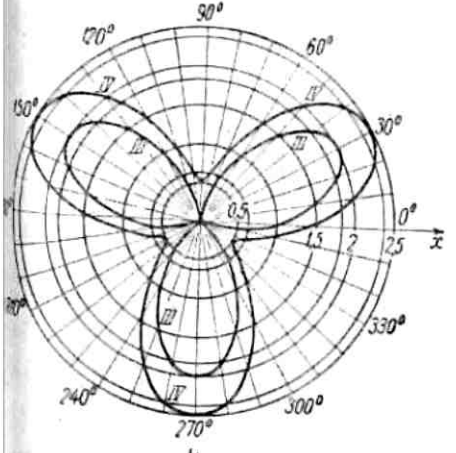
Considerînd că m și n sînt prime între ele, vom studia funcția $r=\sin\frac{m\varphi}{n}$. Putem întîlni următoarele cazuri:

1) m par, n impar. Făcînd pe φ să varieze de la 0 pînă la $360°n$, obținem o rozetă completă de $2m$ bucle $\left(360°\,n:\frac{180\,n}{m}=2\,m\right)$, dintre care ultima va fi negativă; de aceea dacă φ variază mai departe, vom „parcurge" din nou rozeta construită (în fig. 80, *a* avem $m=4$, $n=3$).

2) m impar, n par. Făcînd pe φ să varieze de la 0 pînă la $n\cdot 180°$ (cu un număr întreg de cercuri !), vom obține m bucle $\left(n\cdot 180°:\frac{180°n}{m}=m\right)$, însă ultima va fi pozitivă; de aceea, dacă φ continuă să varieze de la $n\cdot 180°$ pînă la $n\cdot 360°$, vom obține bucle „diametral opuse" celor construite; în ansamblu vom obține iarăși o rozetă din $2m$ bucle (în fig. 80, *b* avem $m=5$, $n=2$).

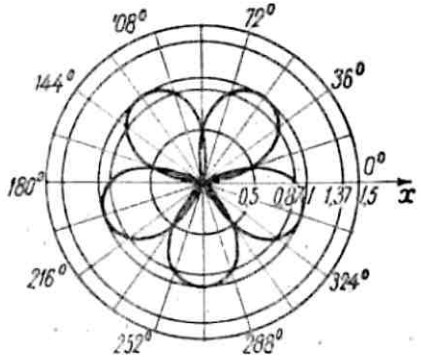


a)

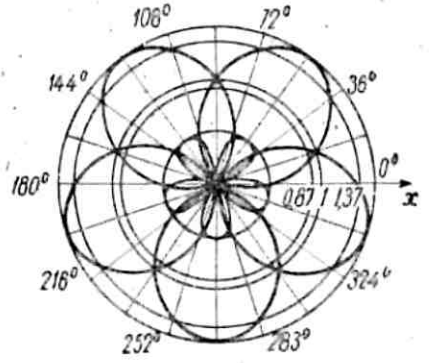


b)

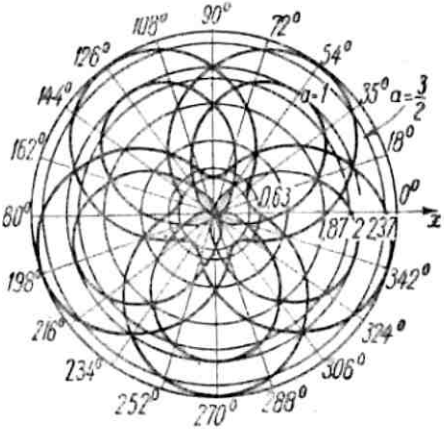
Fig. 77



a)



b)



c)

Fig. 78

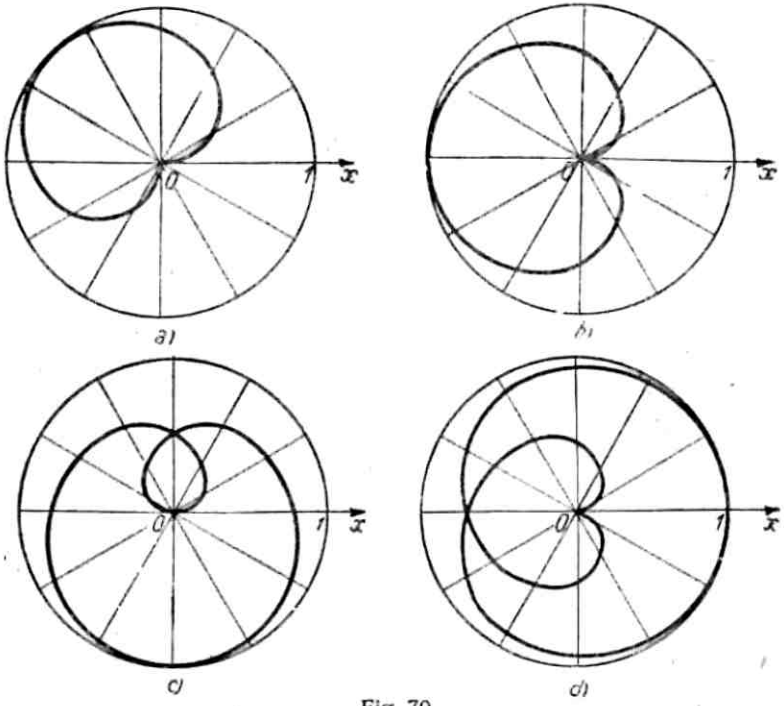


Fig. 79

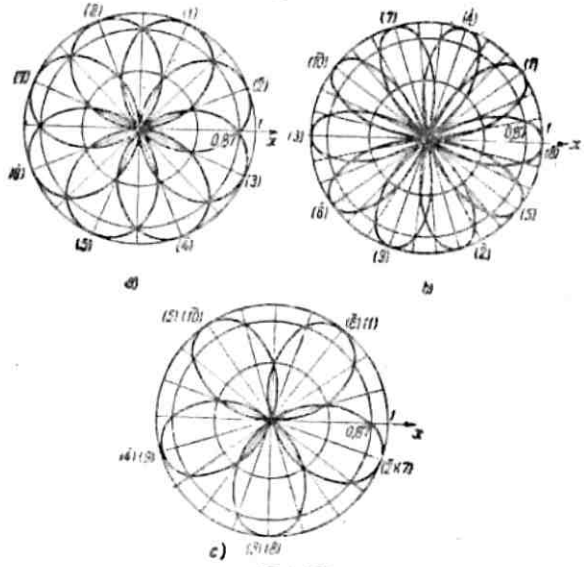


Fig. 80

3) m și n impare. Cînd φ variază de la $0°$ pînă la $n \cdot 180°$, obținem m bucle, și deoarece ultima dintre ele va fi pozitivă, bucla $a(m+1)$ care urmează va fi negativă și va coincide cu prima buclă pozitivă; în total, cînd φ variază de la $n \cdot 180°$ pînă la $n \cdot 360°$, vom obține toate cele m bucle dinainte construite, dar cele care „la prima mișcare" erau pozitive vor deveni negative, și invers (în fig. 80, c avem $m=5$, $n=3$).

Curbele lui Lissajou

Se pot construi numeroase curbe interesante și în coordonate carteziene. Deosebit de ușor se construiesc curbele ale căror ecuații sînt date parametric:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

unde t este o variabilă auxiliară (parametru).

În acest caz, pentru construirea curbei calculăm valorile lui x și y corespunzătoare unor valori destul de apropiate ale parametrului t (crescătoare sau descrescătoare), marcăm în figură punctele (x, y) și le unim, în ordinea creșterii lui t, printr-o linie continuă. De exemplu, pentru ecuațiile

$$\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\sin 3t \end{cases} \text{ avem}$$

t	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$	$105°$ ...
x	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	—0,5 ..
y	0	0,7	1	0,7	0	—0,7	—1	—0,7...

Continuînd tabela pînă la $t=360°$ și marcînd pe figură punctele A_0, A_1, A_2,..., A_{24}, în conformitate cu valorile obținute pentru x și y, obținem ușor curba din fig. 81.

Este una dintre așa-numitele *curbe Lissajou*, caracterizate în cazul general prin ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} x&=a \sin mt, \\ y&=b \sin n(t+\alpha). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Dacă luăm ca parametru t timpul, atunci figurile lui Lissajou vor fi rezultatul compunerii a două mișcări oscilatorii armonice, efectuate în direcții perpendiculare una pe cealaltă.

Verificați că ecuațiilor: *I.* $x=\sin 3t$; $y=\sin 5t$ *II.* $x=\sin 3t$; $y=\cos 5t$; *III.* $x=\sin 3t$; $y=\sin 4t$; *IV.* $x=\sin(t-45°)$, $y=\sin t$ le corespund curbele reprezentate în fig. 82. În afara curbelor lui

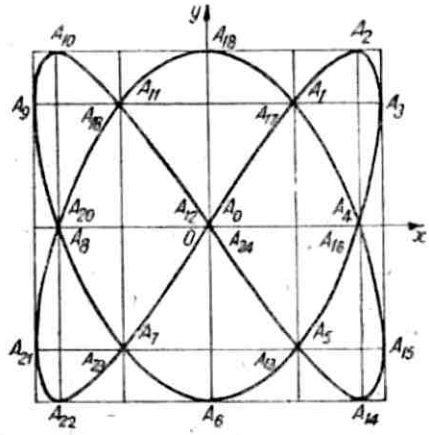

y
x
0
A10
A18
A2
A9
A11
A1
A3
A19
A17
A20
A12
A0
A4
A8
A24
A16
A21
A7
A5
A15
A23
A13
A22
A6
A14

Fig. 81

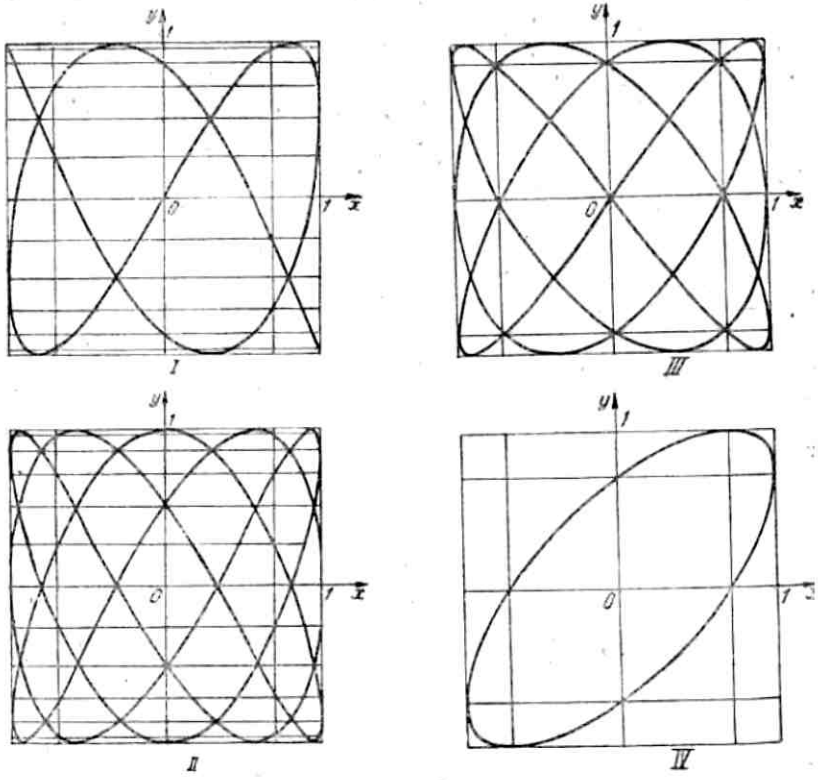

y
1
0
1
x
I
III
II
IV

Fig. 82

Lissajou, mai sînt desenate pe figură pătrate de latură 2, curbele fiind situate în interiorul lor în tangente la laturi. În cazul general, curba (1) este în interiorul unui dreptunghi de laturi $2a$ și $2b$.

Cînd construim curbele lui Lissajou este util ca, în prealabil, să determinăm punctele de contact ale curbei cu laturile dreptunghiului corespunzător, precum și să ducem dinainte în interiorul dreptunghiului dreptele auxiliare: cele orizontale la distanțele $b \sin 15°$, $b \sin 30°$, $b \sin 45°$, $b \sin 60°$, $b \sin 75°$ de la originea coordonatelor și cele verticale la distanțele $a \sin 15°$, $a \sin 30°$ etc. de la originea coordonatelor (considerînd că φ variază din 15 în 15°, iar $\alpha = 0$).

Curba lui Lissajou va fi deschisă dacă pentru o anumită valoare a parametrului curba „se va lovi" de vîrful dreptunghiului: în cazul cînd φ continuă să crească, punctul va descrie aceeași curbă în sens invers (vezi, de exemplu, curba *I* din fig. 82).

Considerînd $\alpha = 0$ ([68]), aflați condiția în care curba *I* va fi deschisă. Este util să urmărim felul în care înlocuirea ecuațiilor *I*, de exemplu, prin ecuațiile $x = \sin 3t$, $y = \sin 5(t + 3°)$ transformă curba deschisă într-una închisă.

Cicloide, epicicloide, hipocicloide

Amatorilor de matematică le va face plăcere, fără îndoială, să cunoască mai îndeaproape cicloida, epicicloida și hipocicloida — așa se numesc curbele pe care le descrie un punct M de pe un cerc de rază r, care se rostogolește respectiv pe o dreaptă (cicloidă), pe un cerc fix de rază R, fiind tangent la el din exterior (epicicloidă) și pe un cerc fix de rază R, fiind tangent la el din interior (hipocicloidă).

Ecuațiile acestor curbe se pot scrie sub formă parametrică, după cum urmează:

$$\text{cicloida} \quad \begin{cases} x = r(t - \sin t), \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases}$$

$$\text{epicicloida} \quad \begin{cases} x = R[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t], \\ y = R[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t], \end{cases}$$

$$\text{hipocicloida} \quad \begin{cases} x = R[(1-m)\cos mt + m\cos(1-m)t], \\ y = R[(m-1)\sin mt + m\sin(1-m)t], \end{cases}$$

unde $m = r/R$.

În fig. 83 este reprezentată epicicloida (a) pentru $m=2/5$ și hipocicloida (b) pentru $m=2/9$.

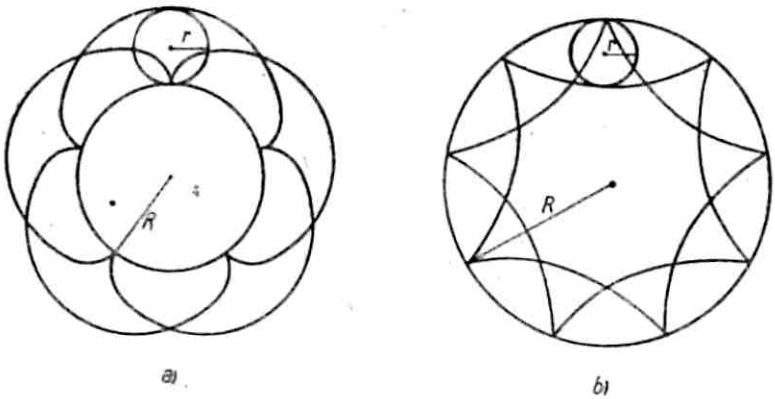


Fig. 83

Linii frînte interesante

Numeroase posibilități de a modifica aspectul curbelor sînt legate de folosirea semnului de valoare absolută (de modul) în ecuația unei curbe.

De exemplu, ecuațiilor $y=\sin x$, $y=|\sin x|$, $|y|=\sin x$ și $|y|=|\sin x|$, le corespund curbele a), b), c) și d) din fig. 84.

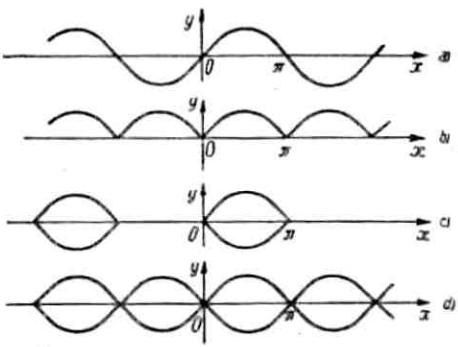


Fig. 84

„Curba" corespunzătoare ecuației

$$|x|+|y|=1, \qquad (2)$$

este pătratul $ABCD$ (fig. 85, a) deoarece, de exemplu, pentru cadranul al doilea, unde $x<0$ și $y>0$, ecuația (2) poate fi scrisă $-x+y=1$, ceea ce reprezintă ecuația dreptei l, din care trebuie să luăm numai segmentul situat în cadranul al doilea.

Încercați să vă convingeți ([69]) că ecuațiilor

I. $|2y-1|+|2y+1|+\frac{4}{\sqrt{3}}|x|=4,$

II. $|x|+|y|+\frac{1}{\sqrt{2}}\{|x-y|+|x+y|\}=\sqrt{2}+1,$

III. $\big||x|+\big||y|-3\big|-3\big|=1$

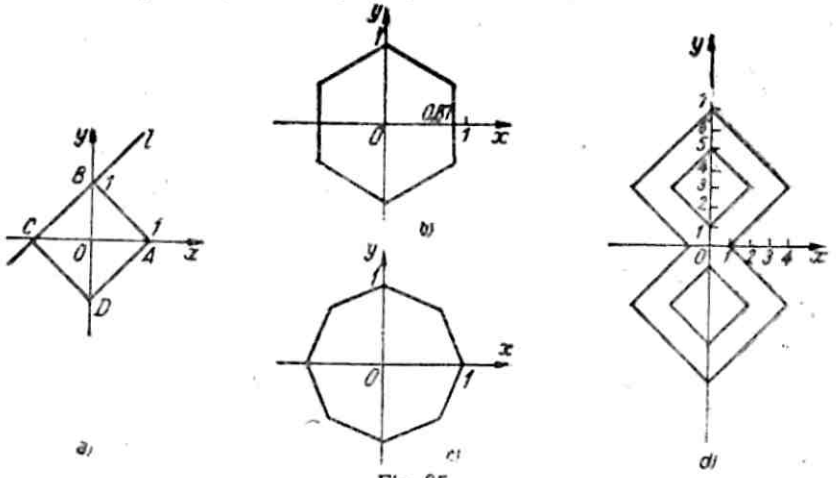


Fig. 85

le corespund hexagonul regulat, octogonul regulat și „optul" reprezentate în fig. 85, *c*, *d*.

Veți reuși oare să obțineți ecuațiile care dau un dodecagon regulat, un poligon regulat cu 16 laturi etc. ? Evident, este mai greu să rezolvăm aceeași problemă pentru pentagonul regulat, heptagonul regulat etc.

De asemenea, sînt curioase curbele corespunzătoare ecuațiilor de forma

$$y=m \arcsin[\sin k(x-\alpha)].$$

Din ecuația $y=\arcsin(\sin x)$ rezultă

$$1)\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ și } 2)\ \sin y=\sin x.$$

Pentru $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ aceste două condiții sînt satisfăcute de funcția $y=x$. Graficul ei în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ va fi segmentul AB al liniei frînte din fig. 86.

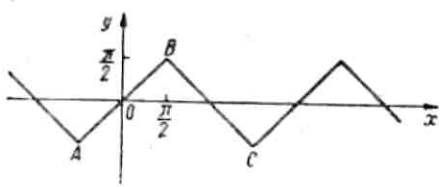


Fig. 86

În intervalul $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ vom avea $y=\pi-x$, deoarece

sin $(\pi - x) = \sin x$ și în acest interval $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Aici graficul va fi segmentul BC.

Deoarece sin x este o funcție periodică de perioada 2π, linia frîntă ABC, construită în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, se va repeta pe porțiunile $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right)$ etc.

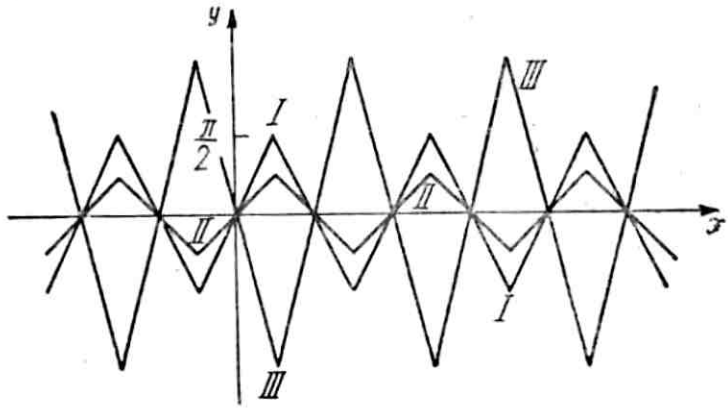


Fig. 87

Ecuației $y = \text{arc sin}\,(\sin kx)$ îi va corespunde linia frîntă I de perioadă $2\pi/k$ (perioada funcției sin kx) (în fig. 87, $k=2$).

Adăugînd în membrul al doilea factorul m, căpătăm ecuația $y = m$ arc sin (sin kx), căreia pentru $m > 0$ îi va corespunde o linie frîntă de forma II $\left(m = \frac{1}{2}\right)$, iar pentru $m < 0$, o linie frîntă de forma III $(m = -2)$.

În sfîrșit, ne convingem ușor ([70]) că, deplasînd aceste din urmă linii frînte spre dreapta, cu segmentul α, obținem graficele funcțiilor de forma.

$$y = m \arcsin[\sin k(x - \alpha)].$$

Propunem cititorului să verifice că ecuației

$$\left[y - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right]\left[y + \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right] \times \left[y - \frac{2}{\pi} \arcsin\right.$$

$\left(\sin\frac{\pi(x-1)}{2}\right)\left[y+\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi(x-1)}{2}\right)\right]=0$, îi corespunde mulţimea de linii reprezentate în fig. 88 (produsul este egal cu 0, numai atunci cînd unul dintre factori se anulează ; egalînd cu 0

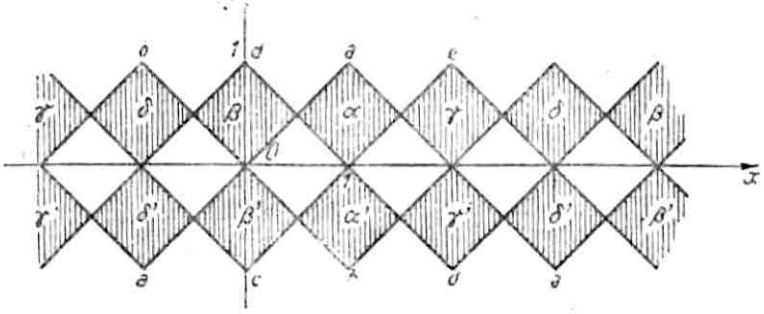


Fig. 88

primul, al doilea, al treilea şi al patrulea factor, pe rînd, obţinem respectiv ecuaţiile liniilor frînte *a*, *b*, *c*, *d*,). Explicaţii în plus la fig. 88 vor fi date în paragraful următor.

Curbe curioase

Unele curbe ale căror ecuaţii conţin puteri cu exponenţi foarte mari, prezintă o serie de particularităţi interesante.

De exemplu, pentru ecuaţia $y^{1000\,000}=x$ avem tabela:

x	0	10^{-6}	1	10^{10}	10^{100000}
y	0	$\pm 0{,}999986$	± 1	$\pm 1{,}000023$	$\pm 1{,}2583$

(verificaţi !(70a))

din care se vede că pe distanţă foarte mare curba nu se va deosebi aproape de loc de linia frîntă *LMNP* (fig. 89).

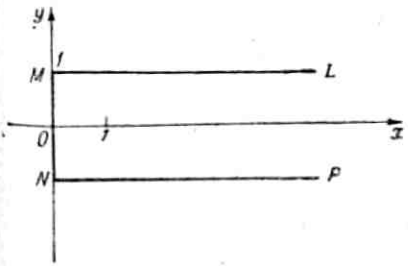


Fig. 89

În fig. 90 este reprezentat graficul funcţiei $y=\sin x+2(\sin x)^{1\,000\,000}$

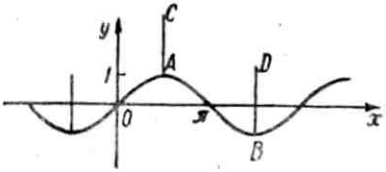


Fig. 90

x	$89^\circ 45'$	$89^\circ 50'$	90°	(verificați!(70a))
$2\,(\sin x)^{1\,000\,000}$	0,00016	0,032	2	

Din tabelă se vede că termenul al doilea al funcției diferă prea puțin de zero, pentru valorile lui x care sînt chiar foarte apropiate de 90° (precum și de 270° etc.); de aceea, în anumite puncte ale sinusoidei obișnuite (A, B etc.) vom avea niște vîrfuri foarte înguste, îndreptate în sus, care, dacă desenăm curba la o scară relativ mică, vor avea forma segmentelor AC, BD etc.

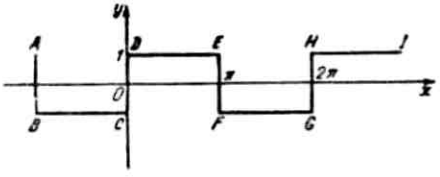



Fig. 91

Ecuației $y^{1\,000\,001}=\sin\frac{\pi x}{2}$ îi corespunde o curbă prea puțin diferită de linia frîntă $ABCDEFGHI$ (fig. 91) (chiar pentru $x=0{,}000001$ avem $y\approx$ $\approx 0{,}999984$).

Termenii conținînd o anumită funcție periodică la o putere mai mică pot fi folosiți pentru a modifica forma altor curbe relativ simple. Încercați, folosind tabela valorilor funcției $\sin x$ și tabela ușor de continuat

x	$\sin 3x$	$\sin^5 3x$	$\sin^9 3x$
0	0	0	0
5°	0,259	0,0091	0,0000052
10°	0,5	0,031	0,002
15°	0,707	0,178	0,044
20°	0,866	0,487	0,28
25°	0,966	0,84	0,73
30°	1	1	1

să desenați la scară mare graficele funcțiilor

$$y=\sin x+\frac{1}{3}(\sin 3x)^5$$

și

$$y=\sin x-\frac{1}{2}(\sin 3x)^9.$$

Influența exercitată de termenii adăugați asupra formei curbei se urmărește într-un mod util și în coordonate polare.

De exemplu, ecuațiilor $r=4(1+\cos 3\varphi)$ și $r=4(1+\cos 3\varphi)+$ $+4\sin^2 3\varphi$ le corespund curbele din fig. 92.

Ecuațiile

$$r=5+2\cos\varphi+3\cos^{71}\varphi$$

și

$$r=5+2\cos\varphi+3\cos^{71}\varphi-\sin^2 18\,\varphi\cos^4\frac{\varphi}{2}$$

dau contururile „frunzei de liliac" și ale „frunzei de urzică".

Îi recomandăm cititorului să construiască întîi curba $r=5+2\cos\varphi$ și să urmărească apoi influența termenului $3\cos^{71}\varphi$ și pe urmă influența termenului $-\sin^2 18\,\varphi\cos^4\frac{\varphi}{2}$.

Poate că unii dintre cititori, vor obține rezultate interesante.

Foarte curioasă este funcția $y=1+\sqrt{\lg\cos 2\pi nx}$, care ia valori reale (egale cu 1) numai pentru $x=0,\ \pm\frac{1}{n},\ \pm\frac{2}{n},$ în toate celelalte cazuri expresia de sub radical va fi ori negativă, ori imaginară.

Graficul acestei funcții va fi mulțimea de puncte situate la distanța 1 deasupra axei Ox și distante între ele cu $1/n$ (vezi fig. 93, *a*).

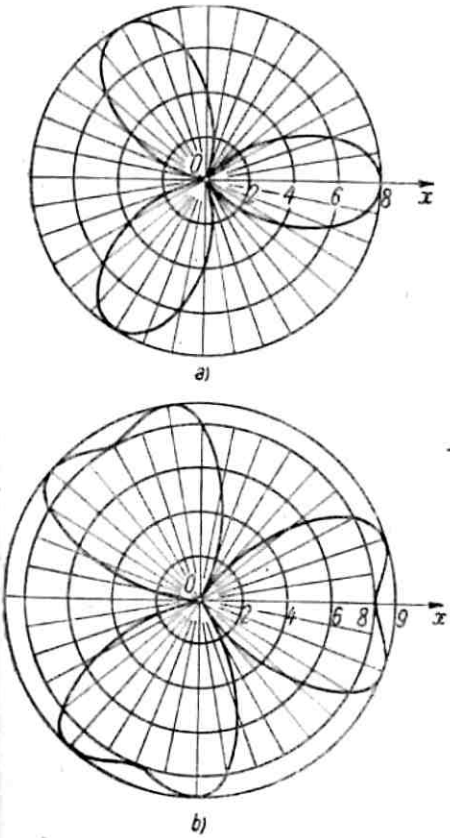


Fig. 92

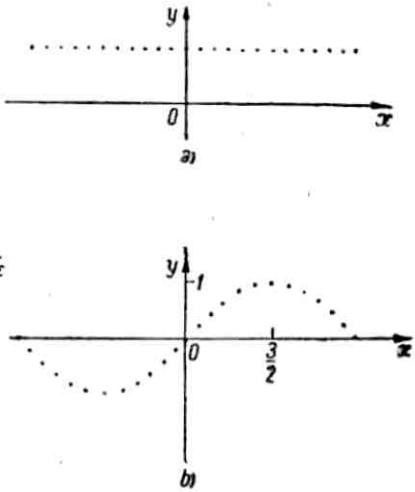


Fig. 93

Dacă este cunoscut graficul funcției $y=f(x)$, atunci păstrînd numai punctele curbei care au abscisele $0, \pm\frac{1}{n}, \pm\frac{2}{n}$ etc., vom obține graficul funcției $y=f(x)\ (1+\sqrt{\lg\cos 2\pi nx})$ (vezi fig. 93, *b*, unde $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}$ și $n=4$).

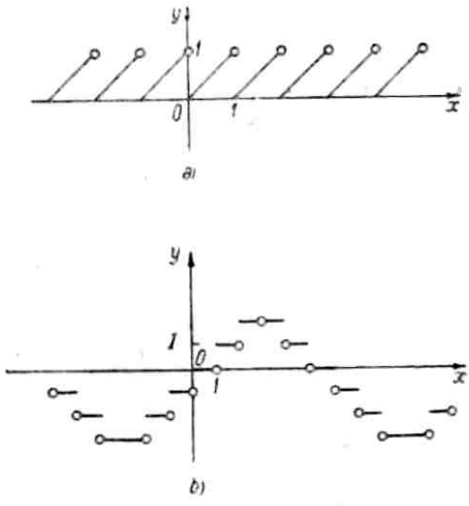


Fig. 94

Aplicarea funcției $f(x)=[x]$ (vezi § 2) permite să transformăm funcții „puțin interesante" în funcții ale căror grafice au un aspect foarte original. De exemplu, în fig. 94, este reprezentat graficul *a*) al funcției $y=x-[x]$, precum și graficul *b*) al funcției $y=\left[\frac{6}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{6}\right)\right]$; micile cercuri goale arată că din grafic nu fac parte punctele corespunzătoare.

§ 29. ORNAMENTE MATEMATICE

Vom înțelege prin ornament matematic un desen caracterizat printr-o ecuație sau printr-o inegalitate (eventual, printr-un sistem de ecuații sau printr-un sistem de inegalități), în care un anumit ansamblu de figuri se repetă de multe ori.

De exemplu, sistemul de inegalități

$$\left.\begin{aligned} y &> \sin x, \\ y &< -\sin x \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

este satisfăcut de coordonatele punctelor situate deasupra sinusoidei (pentru ele avem $y>\sin x$) și dedesubtul curbei $y=-\sin x$, adică „domeniul soluțiilor" sistemului (1) va fi format din domeniile hașurate în fig. 95.

Să notăm cu $f_1(x, y)$ și cu $f_2(x, y)$ primul și al doilea factor din inegalitatea

$$(y-\sin x)\ (y+\sin x)<0.$$

Această inegalitate va fi satisfăcută de coordonatele punctelor pentru care avem simultan $f_1(x, y) > 0$ și $f_2(x, y) < 0$ (ele sînt situate în regiunile haşurate din fig. 95), precum și de coordonatele punctelor pentru care avem simultan $f_1(x, y) < 0$ și $f_2(x, y) > 0$ (ele se situează în regiunile marcate cu steluțe).

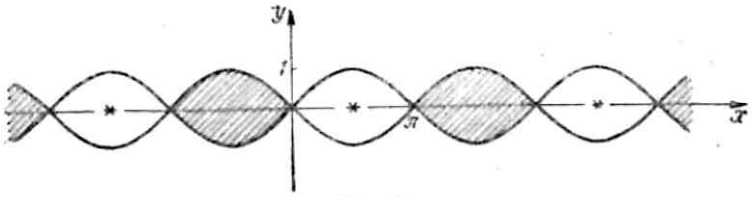


Fig. 95

Mulțimea soluțiilor inegalității (2) va fi formată din regiunile haşurate și din cele marcate cu steluțe. Dacă inegalitatea

$$\left[y-\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right]\left[y+\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left[y-\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi(x-1)}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left[y+\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi(x-1)}{2}\right)\right]\leqslant 0 \qquad (3)$$

vom nota respectiv cu φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 factorii din primul membru, atunci inegalitatea (3) va fi satisfăcută de coordonatele punctelor în care fie unul dintre factorii primului membru este negativ, iar ceilalți pozitivi (de exemplu, acestea vor fi regiunile „α" din fig. 88, unde $\varphi_1 < 0$, iar φ_2, φ_3, $\varphi_4 > 0$, regiunile „β", unde $\varphi_4 < 0$, iar φ_1 φ_2, $\varphi_3 > 0$ etc., fie trei factori din primul membru sînt negativi, iar al patrulea pozitiv (regiunile „α'", unde $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4 < 0$ și $\varphi_2 > 0$, regiunile „β'", unde $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4 < 0$ și $\varphi_3 > 0$ etc.).

Întregul domeniu al soluțiilor inegalității (3) va consta din pătrățelele haşurate din fig. 88.

Mărind numărul factorilor din primul membru al inegalității, alegîndu-i în așa fel încît curbele și liniile frînte pe care ele se anulează să fie deplasate cu anumite segmente unele în raport cu altele, luînd în locul unei singure inegalități compuse un sistem de inegalități simple etc., putem varia sensibil forma desenelor obținute.

Îi lăsăm cititorului să se convingă că

1) inegalitatea

$$\left\{y^2-\arcsin^2(\sin x)\right\}\left\{y^2-\arcsin^2\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}<0; \qquad (4)$$

2) inegalitatea

$$\Phi_{-2}\,\Phi_{-1}\,\Phi_0\,\Phi_1\,\Phi_2 < 0 \tag{5}$$

unde $\Phi_k = \Phi_k\ (x, y) = y^2 - \arcsin\left[\sin^2\left(x + \frac{k\pi}{8}\right)\right]$ și $k =$

$$= -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2;$$

3) inegalitatea

$$\left[y^2 - \sin^2 x\right]\left[y^2 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]\left[y^2 - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] < 0; \tag{6}$$

4) sistemul de inegalități

$$\begin{cases} y^2 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \arcsin^2\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right) < 0, & (7') \\ y^2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \arcsin^2\left[\sin\frac{\pi}{2}(x-1)\right] < 0; & (7'') \end{cases}$$

5) sistemul de inegalități

$$\begin{cases} y^2 - \left(\frac{16}{\pi}\right)^2 \arcsin^2\left(\sin\frac{\pi x}{8}\right) < 0, & (8') \\ y^2 - \left(\frac{16}{\pi}\right)^2 \arcsin^2\left[\sin\frac{\pi(x-1)}{8}\right] < 0, & (8'') \\ y^2 - \left(\frac{16}{\pi}\right)^2 \arcsin^2\left[\sin\frac{\pi(x-3)}{8}\right] < 0, & (8''') \\ y^2 - \left(\frac{16}{\pi}\right)^2 \arcsin^2\left[\sin\frac{\pi(x-6)}{8}\right] < 0 & (8'''') \end{cases}$$

au ca mulțimi ale soluțiilor respectiv figurile haşurate *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) din fig. 96 [în fig. 96, *d* sînt marcate cu linii punctate romburile „late" care dau numai soluția inegalității (7') și romburile „înalte" care dau numai soluția inegalității (7'') ; în fig. 96, *e*, romburile mari *I* delimitează mulțimea soluțiilor inegalității (8') în romburile *II*, mulțimea soluțiilor inegalității (8'') ; partea comună a acestor domenii dă un lanț de mici romburi haşurate].

Folosind inegalități cu variabile la puteri mari, putem spori varietatea ornamentelor matematice. De exemplu, inegalității

$$\left(y^{1000001} - \sin x\right)\left[(2y)^{1000001} - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] < 0 \tag{9}$$

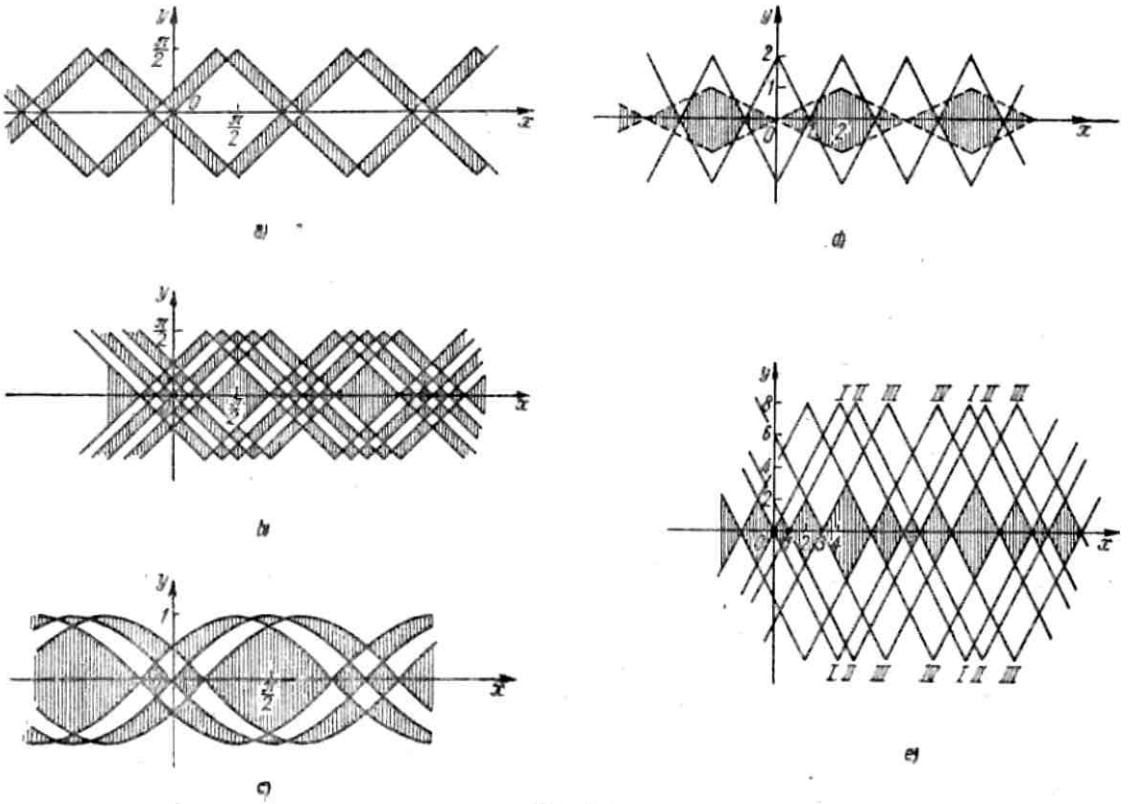


Fig. 96

$$\left(y^{10000001} - \sin\frac{\pi x}{4}\right)\left(y - \frac{4}{\pi}\arcsin\sin\frac{\pi x}{4}\right) < 0 \qquad (10)$$

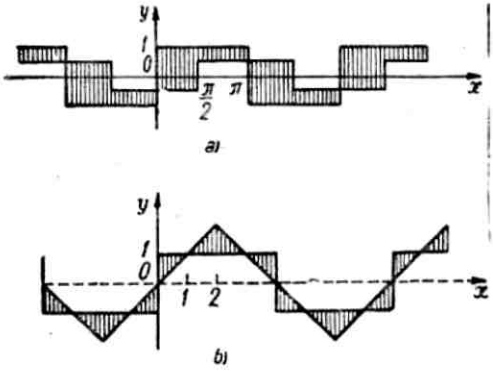


Fig. 97

le corespund mulțimi de soluții care se deosebesc extrem de puțin de cele reprezentate în fig. 97, *a* și *b*.

Alcătuirea ornamentelor matematice poate servi ca un bun subiect de concurs în clasele superioare ; reunind apoi cele mai bune ornamente, se poate obține un album interesant, cu desene frumoase și ingenioase.

§ 30. MODELE DE POLIEDRE

Să admitem că în planele paralele ρ și σ sînt situate muchiile opuse ale unui tetraedru regulat, două vîrfuri opuse ale unui cub și ale unui icosaedru regulat (cu $AB \perp \rho$ și $CL \perp \rho$), fețele opuse ale unui octaedru regulat și a unui dodecaedru regulat (fig. 98).

Intersectînd aceste poliedre cu planul echidistant de ρ și σ și paralel cu ele, căpătăm în secțiune un pătrat, două hexagoane regulate și două decagoane regulate.

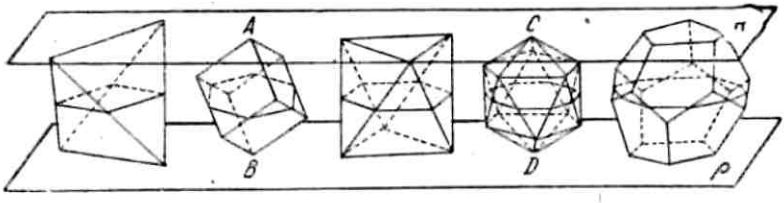


Fig. 98

Dacă vom confecționa modele ale jumătăților fiecăruia dintre aceste poliedre și le vom uni prin articulații (lipind o fîșie îngustă de hîrtie subțire și rezistență, sau de pînză în lungul muchiei lor comune), vom obține modele care reprezintă intuitiv forma secțiunilor și a părților în care poliedrele sînt tăiate prin „plane mediane".

În figura 99 sînt redate desfășurările jumătăților dodecaedrului și icosaedrului.

Sînt de asemenea interesante și instructive modelele care ne arată „trecerea" de la unele poliedre regulate la altele. În fig. 100 *a*, se vede că octaedrul regulat *ABCDEF* poate fi completat pînă la tetraedrul regulat *KLMN*, adăugînd cîte un mic tetraedru la patru din fețele sale.

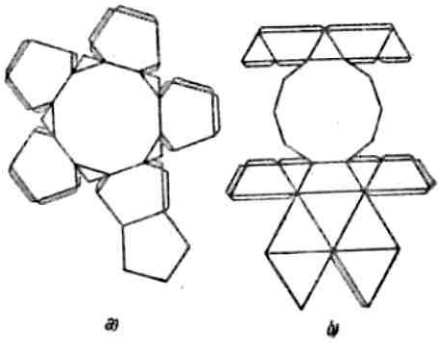


Fig. 99

La rîndul său, adăugînd la toate fețele tetraedrului regulat *KLMN* piramide triunghiulare egale *KLMV*, *LMNT*, *KMNS* și *KLNU* obținem un cub. Lipind separat aceste piramide și reunindu-le prin articulații la muchiile *MN*, *NL* și *LM*, căpătăm o „învelitoare" pe care, „îmbrăcînd-o" peste tetraedrul *KLMN*, acesta se transformă în cub (fig. 100, *b*).

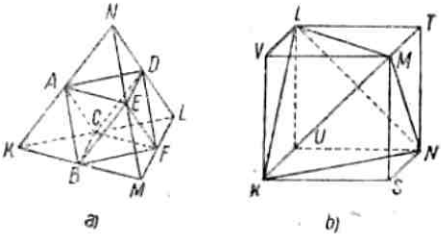


Fig. 100

Pentru cub, putem lipi din șase „căpăcele" egale *ABCDKL*, *ADEFMN* etc. o învelitoare care îl transformă în dodecaedru regulat (fig. 101, *a*). În fig. 101, *b* este reprodusă separat desfășurarea unui astfel de căpăcel; unghiurile obtuze ale triunghiurilor și ale trapezelor au cîte 180°, iar $b=\frac{a}{2\cos 36^\circ}\approx 0{,}618a$.

În sfîrșit, din cele 12 poliedre reprezentate în fig. 101, *c* putem confecționa o învelitoare care transformă dodecaedrul regulat de muchie *a* într-un icosaedru regulat, circumscris dodecaedrului. Fiecare căpăcel este mărginit de pentagonul regulat *ABCDE* de latură *a*, de cinci triunghiuri isoscele (*AKE*, *EMD* etc.) avînd laturile egale $b\approx 0{,}535\ a$, și de cinci patrulatere egale (*EKSM*, *DMSL* etc.); $EK=EM=b$; $KS=SM\approx 0{,}927a$; $\sphericalangle KEM=120^\circ$, $\sphericalangle EKS=\sphericalangle EMS=90^\circ$.

Cu ajutorul modelelor ne putem familiariza cu *prismatoizii* de diverse forme, care sînt poliedre convexe avînd ca baze poligoane de forma arbitrară, situate în plane paralele, iar ca fețe laterale triunghiuri (sau în unele cazuri trapeze), ale căror vîrfuri coincid toate cu vîrfurile corespunzătoare ale bazelor. În fig. 102 sînt reprezentate

prismatoidul *ABCDKLM* avînd o bază triunghiulară şi una patrulateră, prizmatoidul *EFHQR* avînd o bază triunghiulară şi una „biunghiulară" (segmentul *QR*) şi aşa-numita *antiprismă regulată*, cum se

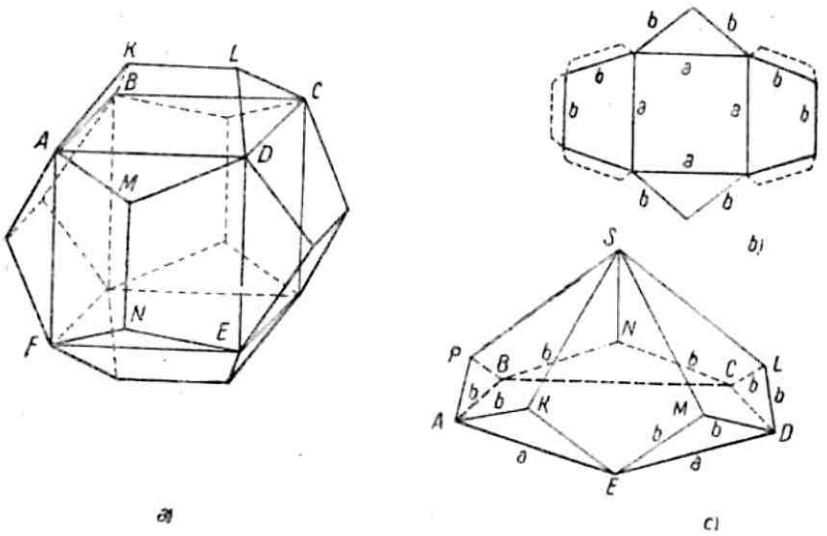


Fig. 101

numesc prismatoizii ale căror baze sînt poligoane regulate cu n laturi, egale între ele, iar feţele laterale triunghiuri echilaterale, „linia centrelor bazelor" O_1O_2 fiind perpendiculară pe ρ iar bazele sînt rotite una în raport cu cealaltă cu unghiul π/n.

Desfăşurarea unui prismatoid se construieşte uşor dacă este dată proiecţia lui pe planul ρ (sau σ), precum şi înălţimea h (fig. 103).

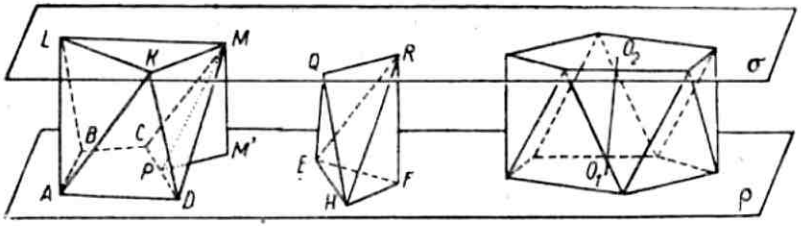
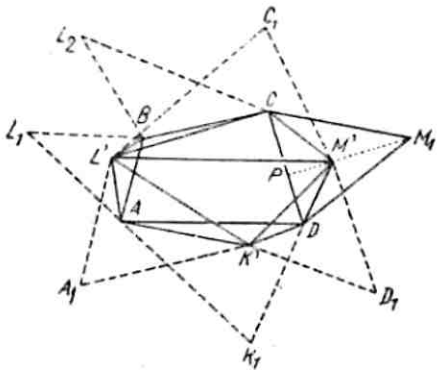


Fig. 102

Bazele prismatoidului apar nedeformate în proiecţie ; în schimb pentru a determina, de exemplu, forma adevărată a feţei CDM trebuie să ducem segmentul $M'P \perp CD$ şi să luăm pe el $PM_1 = \sqrt{M'P^2 + h^2}$

(vezi fig. 102). În mod analog, se determină forma reală a celorlalte fețe laterale vecine cu baza *ABCD*, iar apoi a fețelor vecine cu baza *KLM* (ele sînt marcate cu linii punctate în fig. 103).



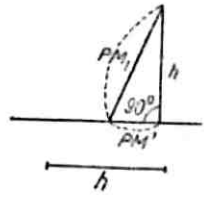


Fig. 103

După ce decupăm figurile $AL_1BL_2CM_1DK_1A$ și $K'A_1L'C_1M'D_1K'$ (și lăsînd la margini rezerva necesară pentru a le lipi), este ușor să construim apoi și prismatoidul.

Construiți desfășurările și lipiți modelele cîtorva prizmatoizi neregulați, precum și ale cîtorva antiprisme regulate (pentru $n=5$, 6, 7, ...).

După cum se vede din fig. 104, cubul poate fi format din trei piramide egale : *LABCD*, *LMNCD*, *LAKND*, avînd muchia comună *LD* (diagonala cubului) și bazele pătrate *ABCD*, *NMCD*, *AKND* ; de aici rezultă — fără a folosi formula volumului piramidei — că volumul piramidei cu baza pătrată a cărei muchie laterală este egală cu latura a a bazei și perpendiculară pe planul bazei, este egal cu $\frac{a^3}{3}$.

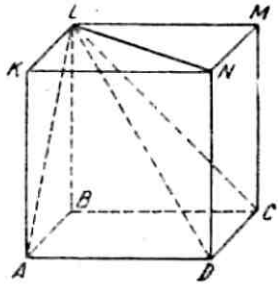


Fig. 104

Dacă rotim cubul cu 120° și cu 240° în jurul diagonalei *LD*, piramidele *LABCD*, *LNMCD*, *LAKMD* trec una în alta.

Confecționați un model demontabil al cubului, lipind aceste piramide și unind „prin articulații" prima cu a doua după muchia *LC* și prima cu a treia după muchia *LA*.

Dacă am umple spațiul cu cuburi egale, astfel încît două cuburi vecine oarecare să aibă o față comună, și le-am colora (ca pe o tablă de șah) în alb și în negru, atunci, ducînd prin muchiile fiecărui cub negru *ABCDKLMN* (fig. 105) plane care trec în același timp prin centrele O_1, O_2, ale

cuburilor albe vecine (de exemplu, planul O_1KN) vom tăia fiecare cub alb în cîte șase piramide egale.

Dacă vom lipi de fiecare cub negru piramidele albe vecine cu el, spațiul va fi umplut cu așa-numiți *dodecaedri rombici.*

Dodecaedrul rombic are 8 unghiuri triedre și șase unghiuri cu cîte patru fețe, iar fiecare dintre cele 12 fețe este un romb avînd raportul între diagonale de $1 : \sqrt{2}$. Demonstrați că planele O_1KN și KO_2N coincid.

Construiți 5—6 dodecaedri rombici egali și convingeți-vă că ei „se îmbină" foarte bine unul într-altul.

Dacă împărțim cubul $ABCDKLMN$ (fig. 106) în opt cuburi mici prin plane paralele cu fețele și care trec prin centrul cubului și tăiem apoi din fiecare cub mic jumătatea corespunzătoare vîrfului cubului mare (de exemplu, poliedrul cu 7 fețe $NXYZPQRSTU$, corespunzător vîrfului N), ne va rămîne din cubul inițial un poliedru cu șase fețe pătrate și cu opt fețe hexagonale regulate, format parcă din opt „jumătăți de cuburi", avînd vîrful comun în centrul O al cubului inițial.

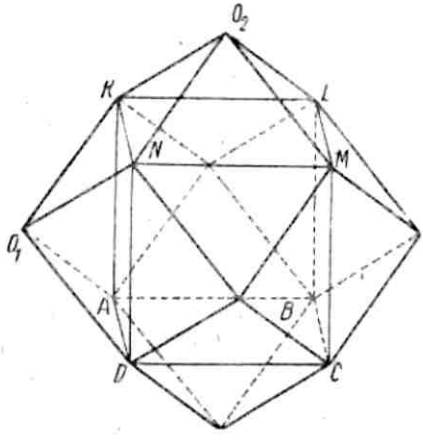


Fig. 105

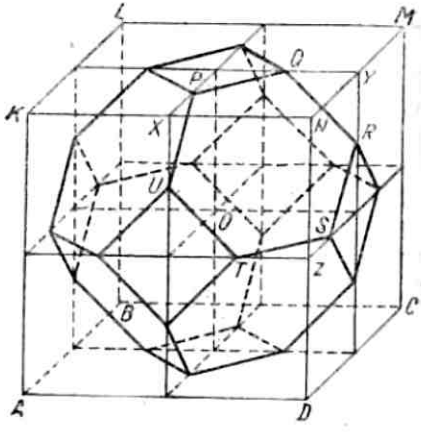


Fig. 106

Putem construi exact același poliedru din opt „jumătăți de cub" grupate în jurul punctului N, dacă presupunem că operația descrisă mai sus se efectuează cu fiecare dintre cele opt cuburi mari avînd vîrful comun în N.

Prin urmare, poliedrele cu 14 fețe, reprezentate în fig. 107, ne permit să umplem tot spațiul „fără lacune". Vă puteți convinge de aceasta, lipind cinci poliedre egale de acest fel.

Dintr-un carton rigid putem construi modele demontabile ale unor poliedre. De exemplu, decupați din carton patru triunghiuri echilaterale și uniți-le prin articulații în două perechi, lipind de ele cîte o fișie de pînză rezistentă în lungul dreptei AB și al dreptei CD (fig. 107, *a*).

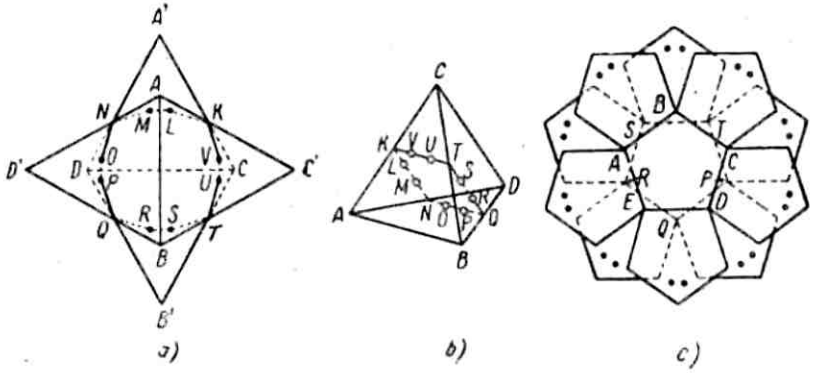


Fig. 107

Dacă unim romburile obținute cu un inel de cauciuc „întins" *ONMLKVUTSRQPO*, trecut prin orificiile *M* și *L*, *V* și *U*, *S* și *R*, *P* și *Q*, atunci contractîndu-se, cauciucul va tinde să transforme figură plană *a*) în tetraedrul *b*) (punctele *U* și *V* sînt situate pe linia mijlocie a triunghiului *ABC* etc.).

Pentru a obține un model pliant de dodecaedru regulat, trebuie să facem următoarea operație : o „rozetă" din șase pentagoane regulate, decupate din carton gros, dintre care cinci sînt unite prin articulații cu pentagonul central *ABCDE* (fig. 107, *c*), se suprapune peste „rozeta" egală avînd pentagonul central *PQRST*, iar prin cele 12 găuri indicate în desen trecem un fir de cauciuc „închis".

Probleme diverse

1) Ducînd prin fiecare din cele 12 muchii ale unui cub cîte un plan înclinat față de fețele diedrului corespunzător, am obținut un dodecaedru rombic (fig. 105).

Ducînd prin cele 24 muchii ale dodecaedrului rombic plane egal înclinate pe fețele sale corespunzătoare, obținem poliedrul S_1, „circumscris" dodecaedrului rombic ; apoi, în același mod, putem obține din S_1 poliedrul S_2, din S_2 pe S_3 etc.

Încercați să determinați forma fețelor poliedrelor S_1 și S_2 și să construiți modelele lor.

Se pot pune probleme similare luînd ca poliedru inițial nu cubul, ci un alt corp (dodecaedrul regulat, antiprisma pentagonală regulată etc.).

Ce vom obține dacă vom alege ca poliedru inițial un tetraedru regulat sau un octaedru regulat ([71]) ?

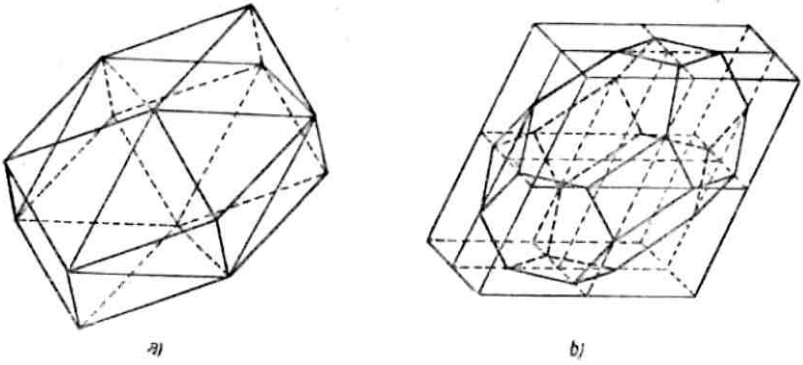


Fig. 108

2) Dacă umplem spațiul cu paralelipipede egale de formă arbitrară, colorate „ca la tabla de șah", atunci, unind cu fiecare paralelipiped negru cele șase piramide avînd vîrfurile în centrele paralelipipedelor albe vecine, obținem dodecaedre care umplu spațiul fără lacune (fig. 108, *a*).

Dacă tăiem din fiecare paralelipiped mare opt jumătăți ale paralelipipedelor mici obținem poliedre cu 14 fețe care umplu și ele spațiul (fig. 108, *b*).

Încercați, cunoscînd înălțimea b a paralelipipedului și proiecția sa pe planul bazei, să construiți desfășurările poliedrelor cu 12 și cu 14 fețe care se obțin în acest mod.

Îmbinînd cîteva poliedre egale de fiecare tip, vă veți convinge că modelele pe care le-ați confecționat „se vor îmbina" strîns unele într-altele.

§ 31. PROBLEME DISTRACTIVE CU O FOAIE ȘI O FÎȘIE DE HÎRTIE

Pe o foaie triunghiulară de hîrtie, putem arăta ușor, fără a recurge la instrumente de desen, că cele trei bisectoare (cele trei mediane, cele trei înălțimi, cele trei mediatoare) ale triunghiului sînt concurente.

În adevăr, este ușor „să construim" oricare dintre aceste linii, îndoind hîrtia în mod corespunzător. Dacă triunghiul *ABC* are un unghi obtuz, atunci, pentru a obține centrul cercului circumscris, trebuie să luăm o foaie de hîrtie de forma *AKLBC* (fig. 109, *a*), iar pentru a obține ortocentrul, o hîrtie de forma *ABDE* pe care sînt marcate (îndoind hîrtia) prelungirile laturilor *AC* și *BC*.

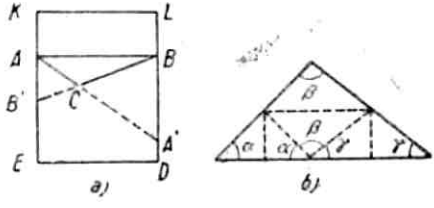


Fig. 109

Și mai simplu este „să demonstrăm" teorema referitoare la suma unghiurilor unui triunghi (fig. 109, *b*).

De asemenea, putem împărți aproximativ — fără instrumente de desen — orice unghi *ABC* în trei părți egale, în care scop este suficient (fig. 110, *a*) să îndoim hîrtia după dreapta *BK* care trece prin vîrful unghiului, în așa fel încît unghiurile *KBA'* și *A'BC* să fie egale. Cu un oarecare exercițiu acesta se face cu multă precizie „după ochi".

Poligoane regulate

Dacă în banda *ABCD* cu marginile paralele (fig. 110, *b*) avem $\sphericalangle ABC = 90^\circ$, atunci, îndoind-o după dreptele *BK*, *KL*, *LM*, *MN*..., putem închide cu ultimele „triunghiuri incomplete" o „scrisoare

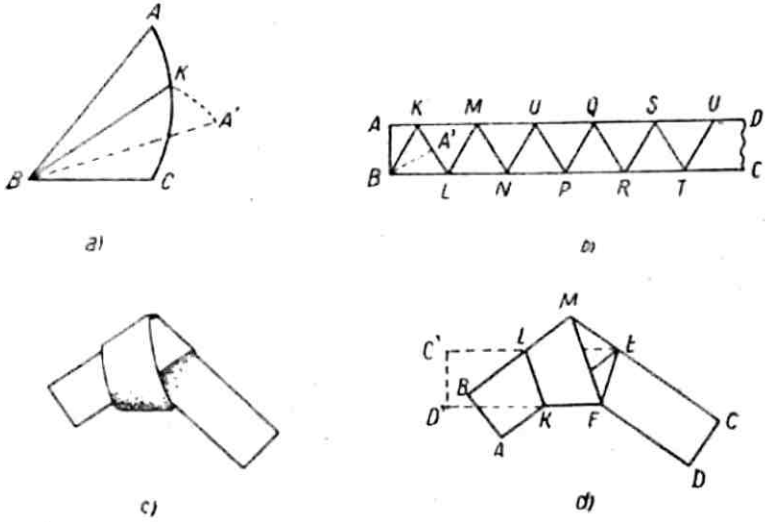


Fig. 110

plic" în formă de triunghi echilateral. Dacă însă „vom îndoi pe jumătate" banda după dreptele BK, KL..., atunci alcătuim din ea ușor suprafețele laterale ale diverselor antiprisme regulate (vezi § 30).

Dintr-o fîșie de hîrtie cu margini paralele putem „construi" ușor un pentagon regulat, „legînd" fîșia într-un nod (fig. 110, *c*) și trăgîndu-l ușor, pentru a-l presa apoi sub forma pentagonului regulat $KLMEF$ (fig. 110, *d*).

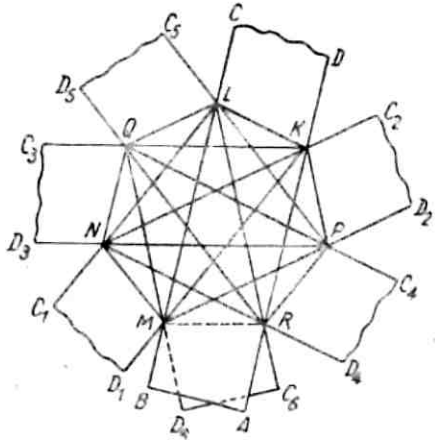


Fig. 111

Dacă vom trece apoi banda $EFCD$, îndoind-o după dreapta EF, sub trapezul $KLMF$, vom obține o „scrisoare plic" de forma unui pentagon regulat. Dacă privim la lumină o astfel de figură, construită din hîrtie nu prea groasă, vedem clar o stea regulată cu cinci colțuri și cu partea centrală mai întunecată.

Îndoind după dreapta KL ($\sphericalangle AKL = 4\pi/7$) fîșia de hîrtie destul de lungă $ABCD$, obținem primele trei vîrfuri K, L, M ale unui heptagon regulat (în fig. 111 trebuie să prelungim considerabil în minte banda de hîrtie dincolo de „limitele curbilinii" CD, apoi C_1D_1 etc.).

Îndoind apoi fîșia de hîrtie consecutiv după dreapta MN (astfel ca NC_2 să treacă prin punctul K), după dreapta KP (astfel ca PD_3 să treacă prin punctul N), după dreapta NQ (astfel ca QC_4 să treacă prin punctul P), după dreapta PR (astfel ca RD_5 să treacă prin punctul Q, iar PC_5 prin punctul L), și, în sfîrșit, după dreapta QL (ca marginile benzii să treacă prin punctele M și R), obținem heptagonul regulat $MNQLKPR$, care, „privit la lumină" ne permite să vedem cîteva stele cu cîte șapte colțuri.

Banda lui Möbius

Apropiați capetele AB și CD ale unei benzi de hîrtie, „răsuciți-o" ușor (astfel ca punctul C să coincidă cu B, iar D cu A) și lipiți astfel capetele AB și CD (fig. 112). Veți obține așa-numita *bandă a lui Möbius*, o bandă cu o singură suprafață, cu o singură foaie care nu poate fi vopsită în două culori diferite de ambele părți ; dacă începem să o colorăm dintr-un anumit punct cu o culoare și înaintăm tot

mai departe, vom ajunge fără să ne dăm seama în punctul de plecare, venind din partea opusă.

Dacă tăiem banda lui Möbius după linia echidistantă față de margini, ea nu se desface în două părți, ci se transformă într-un „inel complet torsionat", iar acesta, dacă îl tăiem după „linia mijlocie", ne dă două inele torsionate de cîte două ori și îmbinate într-un mod ciudat unul cu celălalt. Această proprietate a benzii lui Möbius poate fi folosită pentru a crea o puternică impresie celor neinițiați.

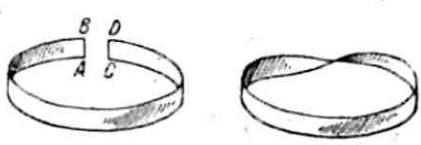


Fig. 112

Amatorilor de matematică le putem recomanda să cerceteze sistematic comportarea benzii lui Möbius și a inelelor de hîrtie multiplu torsionate, decupate după linia mijlocie sau după două linii echidistante între ele și echidistante de marginile corespunzătoare etc.

Construirea unui icosaedru regulat

Luați o foaie de hîrtie mai groasă, lată de 10—12 cm, împăturiți-o cum se arată în fig. 110, *b* și decupați din ea cîteva triunghiuri echilaterale. Fiecare dintre ele este ușor de împărțit „după ochi" (și cu foarte multă precizie !) în 16 triunghiuri echilaterale, îndoindu-l întîi după liniile mijlocii *M'K'* și *K'L'*, *L'M'* (trebuie să facem ca *L* să coincidă cu mijlocul *L'* al laturii *KM* și să netezim hîrtia după linia *M'K'* etc.), apoi după liniile *PQ*, *RS*, *TQ* etc. (vezi fig. 113).

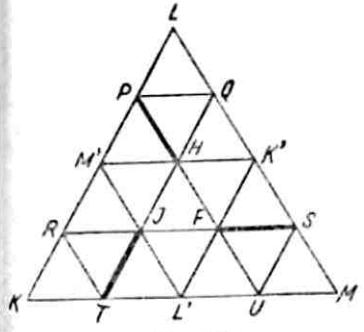


Fig. 113

Dacă tăiem apoi după segmentele *PH*, *FS*, *TI*, atunci rotind, de exemplu, rombul *PLQH* în jurul vîrfului *H*, în sens contrar mersului acelor de ceasornic, astfel încît triunghiul *HQP* să ajungă dedesubtul triunghiului *HM'P*, și îndoindu-l după diagonala *PQ* pînă cînd vîrful *L* ajunge să coincidă cu punctul *H*, obținem un unghi cu cinci fețe avînd vîrful în *H* (bine „fixat" de triunghiul *PQL*, mai ales dacă aplicăm în prealabil în centrul lui o picătură de clei).

După ce am construit în mod analog unghiurile solide cu cinci fețe avînd vîrfurile în punctele *I* și *F*, vom obține modelul jumătății suprafeței unui icosaedru regulat.

Din 4—5 jumătăți de icosaedru, suprapunîndu-le una peste alta, în așa fel încît fiecare pereche să aibă patru fețe comune, obținem ușor un model suficient de rezistent al unui icosaedru regulat.

Va izbuti oare cititorul să construiască modele rezistente ale tetraedrului regulat, octaedrului regulat și icosaedrului regulat din cîteva benzi de hîrtie de lățime egală, împărțite în triunghiuri echilaterale (vezi fig. 110, *b*) ? Poate va reuși să construiască și un model de dodecaedru regulat din cîteva benzi de hîrtie, înnodate fiecare și presate sub forma unor pntagoane regulate (vezi fig. 110, *d*).

§ 32. PROBLEMA CELOR PATRU CULORI

Să admitem că trebuie să colorăm regiuni arbitrare de pe un plan sau de pe o sferă (de exemplu harta politică a lumii) în așa fel încît două regiuni vecine oarecare (adică două regiuni care au o frontieră comună chiar pe o porțiune mică) să nu fie colorate în același fel. Regiunile tangente într-un punct sau în mai multe nu se consideră vecine și pot fi deci colorate la fel.

După cum arată experiența, putem rezolva problema întotdeauna cu cel mult patru culori, desigur dacă renunțăm în cadrul colorării hărții la tradiția constituită, de a marca prin aceeași culoare suprafețele de apă care sînt considerate și ele regiuni separate.

Desigur, se poate întîmpla ca, în urma colorării neadecvate a celor cîteva regiuni cu care am început, să avem nevoie de o a cincea culoare (de exemplu, pentru colorarea regiunii centrale din fig. 114, *a* unde cifrele arată numărul de ordine al culorilor folosite), dar reușim întotdeauna, colorînd altfel primele regiuni, să facem față cu numai patru culori (vezi fig. 114, *b*).

Pînă în prezent însă nu a fost încă nimeni în stare să demonstreze riguros (și în aceasta constă problema celor patru culori !) că este imposibil să împărțim în așa fel un plan sau o suprafață de sferă încît pentru *toate* variantele de colorare să fie nevoie de o a cincea culoare, deși este demonstrat că întotdeauna putem rezolva problema cu cinci culori.

Este interesant că suprafața torului (fig. 114, *c*) poate fi împărțită chiar în șapte regiuni care vor fi vecine fiecare cu toate celelalte și deci (în cazul general), pentru colorarea torului nu putem să o scoatem la capăt cu mai puțin de șapte culori. Este însă demonstrat că nu putem împărți suprafața torului în regiuni, astfel încît o a opta culoare să fie indispensabilă în toate variantele de colorare.

Ne convingem ușor că în cazul unor regiuni spațiale situația va fi cu totul alta, și anume : putem lua oricîte regiuni de acest fel, astfel că oricare dintre ele să aibă o frontieră comună cu fiecare dintre celelalte, sub forma unei anumite porțiuni de suprafață. Este

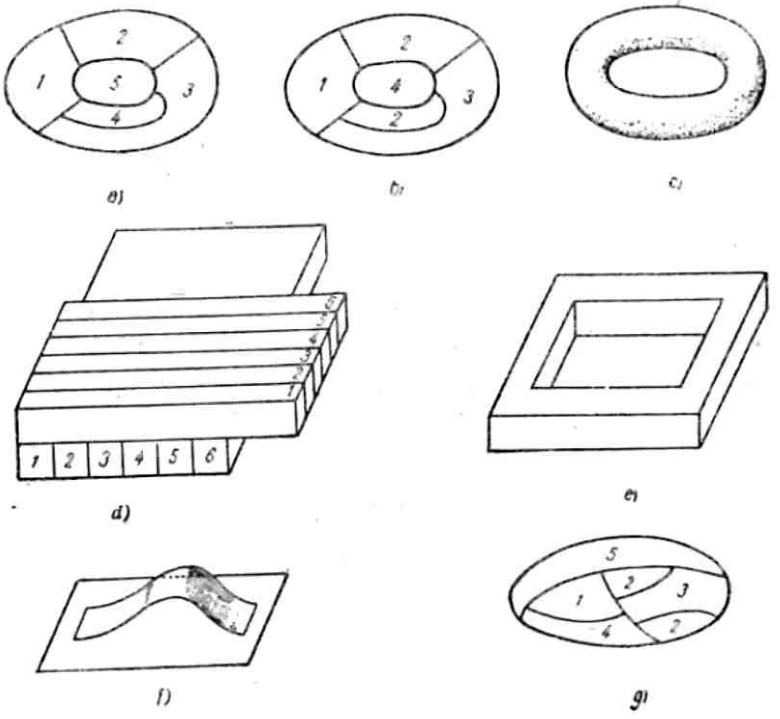


Fig. 114

suficient să luăm două șiruri de bare lungi, dispuse în direcții diferite una peste alta (fig. 114, *d*), și să reunim în cîte o regiune fiecare pereche de bare cu același număr de ordine.

Vom menționa cîteva probleme și întrebări legate prin natura lor de problema celor patru culori.

1) Să se confecționeze modelul unui corp (*e*) topologic echivalent cu torul, să se împartă suprafața sa în șapte regiuni vecine fiecare cu celelalte șase.

2) În mijlocul unei curți se înalță o „punte" mare. Să se împartă teritoriul curții, folosind și suprafața superioară a punții, precum și aria de sub punte, în șapte porțiuni astfel ca orice pereche de porțiuni să fie vecine. Să se deseneze soluția pe modelul (*f*) format dintr-o foaie de hîrtie și dintr-o bandă de hîrtie aplicată peste ea sub formă de punte.

3) Să se demonstreze ([72]) că un număr arbitrar de drepte împarte planul în regiuni pentru colorarea cărora sînt suficiente două culori. Care va fi situația în spațiu, dacă îl împărțim în regiuni prin plane arbitrare ?

4) Să se demonstreze ([73]) că există opt tetraedre (nu neapărat regulate) care pot fi astfel dispuse în spațiu încît fiecare dintre ele să aibă cu toate celelalte o frontieră comună sub forma unei porțiuni de față care nu degenerează într-o dreaptă sau într-un punct.

5) Din fig. 114, *g* se vede că tetitoriul unei insule poate fi împărțit în șase regiuni care să fie distribuite între cinci state, astfel ca orice două state să aibă posesiuni limitrofe. Dacă se va cere ca toate regiunile aparținînd aceluiași stat să fie colorate la fel, va fi inevitabil să folosim cinci culori.

Incercați să aflați, pentru $m=6, 7, 8, 9, \ldots$, numărul minim n de regiuni în care trebuie să împărțim insula între m state, astfel ca orice două state să aibă posesiuni limitrofe.

Poate veți izbuti să găsiți o formulă de tipul

$$n_{min}=f(m).$$

Puteți, de asemenea, luînd o anumită împărțire complicată și încîlcită a insulei, să căutați (întrecîndu-vă unii cu alții) o repartiție a regiunilor, între un număr cît mai mare m de state, astfel ca două state oarecare să aibă posesiuni limitrofe.

§ 33. DESENAREA UNOR FIGURI DINTR-O SINGURĂ TRĂSĂTURĂ

Dintr-o singură trăsătură, adică fără a desprinde creionul de pe hîrtie și fără a trece cu el de două ori peste aceeași linie, putem desena o figură complicată (fig. 115, *a*) formată din mai multe „noduri" și din „drumuri" care le unesc [drumurile pot fi curbilinii (fig. 115, *d*), însă nu putem trasa figura cu aspect foarte simplu *b*].

Vom denumi nod de ordinul k sau, mai scurt, „k-nod" un punct prin care ies k drumuri. Astfel, figura *a*) are două noduri de ordinul 3 și 17 noduri de ordinul 4. Evident, orice punct intermediar aflat pe unul dintre drumuri poate fi considerat un nod de ordinul al doilea.

În trasarea figurii cu creionul, vom face distincția între nodul i n i ț i a l, cel f i n a l și cele i n t e r m e d i a r e.

T e o r e m ă. *Dacă o figură poate fi desenată dintr-o singură trăsătură, atunci nici unul dintre nodurile ei impare nu poate fi nod intermediar.*

În adevăr, un $(2m+1)$-nod poate fi numai inițial sau final, deoarece trecînd prin el de m ori, folosim $2m$ drumuri, iar pe drumul rămas putem doar să începem sau să terminăm trasarea figurii.

Din această teoremă rezultă că nu putem trasa printr-o singură linie o figură avînd mai mult de două noduri impare, între altele, nu putem trasa nici figura *b*), deoarece are patru noduri de ordinul 3.

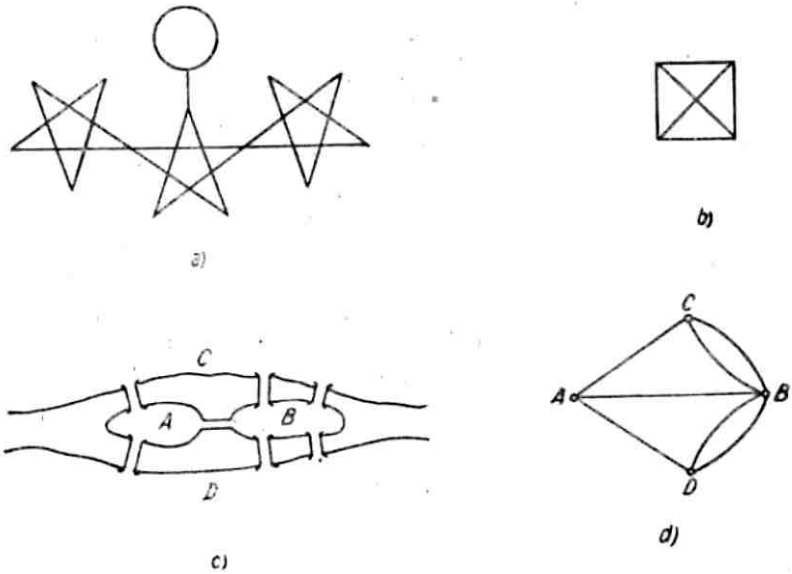


Fig. 115

Să cercetăm celebra problemă cu podurile a lui Euler : este oare posibil să trecem peste șapte poduri care reunesc insulele A și B între ele și cu malurile C și D ale unui rîu, trecînd doar cîte o singură dată peste fiecare pod ? (fig. 115, *c*).

Înlocuind malurile și insulele prin puncte și podurile prin linii care le unesc, vom reduce problema lui Euler la problema desenării dintr-o singură trăsătură a figurii *d*, ceea ce este imposibil, deoarece ea are patru noduri impare.

Demonstrați ([74]) că la orice figură numărul de noduri impare este par.

Dacă din orice punct al unei figuri putem trece în orice alt punct al ei pe drumuri care îi aparțin, figura se numește *conexă*.

Se poate demonstra că orice figură conexă care nu are noduri impare sau are numai două noduri impare poate fi întotdeauna trasată dintr-o singură dată.

Demonstrarea și căutarea modului de a trasa orice figură „trasabilă" se bazează pe faptul că atunci cînd am terminat o trasare

greşit aleasă, care nu a cuprins toate liniile figurii, putem găsi totdeauna un punct comun drumurilor parcurse şi celor care nu au fost parcurse. Drumul închis, care începe şi se termină în acest punct şi parcurge toate drumurile omise anterior, poate fi încorporat în prima variantă de parcurgere, ceea ce va micşora numărul drumurilor neparcurse. Trebuie să procedăm astfel pînă cînd obţinem un parcurs care conţine toate drumurile.

Evident, în cazul cînd avem două noduri impare, unul dintre ele trebuie să fie cel iniţial, iar celălalt nodul final al parcursului; dacă toate nodurile sînt însă pare, putem alege ca punct de plecare orice punct al figurii, terminînd parcursul tot în el.

Dacă vom conveni că fiecare linie a figurii trebuie să fie parcursă exact de cîte două ori cu prilejul trasării (adică fiecare drum care leagă două noduri este întrucîtva înlocuit în minte prin două drumuri), multiplicitatea fiecărui nod se va dubla şi orice figură conexă va putea fi desenată dintr-o singură trăsătură.

Trasarea dublă a unei figuri poate fi dusă pînă la capăt imediat, dacă recurgem la regula lui Tarry; cînd am ajuns într-un anumit nod pentru prima dată, venind pe un drum L, trebuie ca, atunci cînd revenim în acest nod, să evităm drumul L cît timp va fi posibil, adică să parcurgem a doua oară acest drum abia atunci cînd toate drumurile care ies din nodul nostru vor fi parcurse de două ori; în aceste condiţii, nu avem voie să ieşim de două ori pe acelaşi drum din indiferent ce nod (a doua mişcare pe orice drum se realizează în sens contrar celei dintîi).

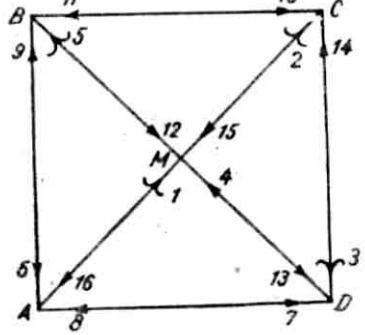


Fig. 116

În fig. 116 s-au efectuat, în conformitate cu regula lui Tarry, 16 parcursuri numerotate, „săgeţile rotunde" fiind puse pe drumurile pe care s-a mers spre nodurile unde nu a mai fost înainte (se poate pleca din nod spre un astfel de drum atunci cînd toate drumurile care converg în el vor fi parcurse de două ori).

Cu prilejul celei de-a doua apropieri de fiecare nod, s-a pus pe drumul corespunzător o săgeată simplă; pe un astfel de drum, a doua mişcare (în sens contrar celei dintîi!) poate fi efectuată oricînd. De exemplu, în locul „mutării" a cincea, se poate trasa segmentul care uneşte pe M cu D, însă mutarea a opta nu s-ar putea înlocui cu nimic, deoarece s-a mai făcut o mişcare pe DM de la nodul D (mutarea a 4-a), iar săgeata rotundă de pe DC arată că acest drum trebuia să fie ultimul parcurs din nodul D.

Regula lui Tarry este de o importanţă principială în problema labirintelor. Orice labirint poate fi considerat ca o mulţime de puncte (platforme, încăperi etc.) legate prin linii (alei, coridoare etc.).

Din regula lui Tarry rezultă că orice labirint conex (adică un labirint fără puncte inaccesibile) poate fi parcurs totdeauna de o persoană care nu cunoaşte planul labirintului, astfel ca fiecare drum să fie parcurs de două ori. Pentru aceasta, trebuie marcate în labirint în afară de „săgeţile rotunde şi cele simple" — „semne de interdicţie", care avertizează împotriva mrsului repetat pe acelaşi drum într-un sens deja parcurs.

§ 34. JOCUL LUI HAMILTON

In 1857 matematicianul englez Hamilton a propus un joc căruia i-a dat numele de „călătorie pe dodecaedru" şi care constă în parcurgerea vîrfurilor unui dodecaedru regulat, cu condiţia de a merge numai pe muchiile sale şi de a nu trece decît o singură dată prin fiecare vîrf.

Dacă vom efectua o proiecţie centrală a dodecaedrului, adică vom proiecta vîrfurile şi muchiile sale (fig. 117, *a*) pe planul care trece prin faţa *ABCDE*, din punctul *O*, aflat la înălţime mică deasupra centrului feţei *VWXYZ*, vom obţine schema *b*).

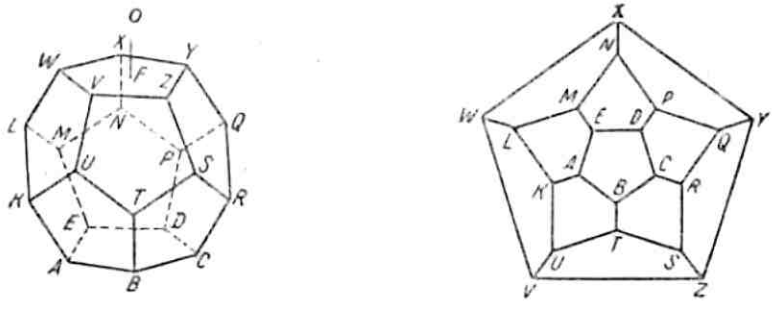


Fig. 117

Una dintre problemele din cadrul jocului lui Hamilton constă în construirea unui parcurs închis care să treacă prin toate cele 20 de vîrfuri. Se constată că după ce am făcut dintr-un vîrf arbitrar patru mutări oarecare putem trece prin toate celelalte vîrfuri, revenind prin a 20-a mutare în vîrful iniţial.

Putem pune problema numărului acestor parcursuri, fixînd bunăoară primele trei vîrfuri şi ultimul vîrf, (în funcţie de poziţia lor

sînt posibile 0, 1, 2, 4 sau 6 parcursuri), sau primele două vîrfuri și ultimele două etc. Totodată, putem interzice trecerea prin anumite vîrfuri sau folosirea unor anumite muchii.

Se poate considera un joc cu doi parteneri care trasează pe rînd segmentele unui „parcurs" frînt, unul dintre parteneri căutînd să realizeze un parcurs complet (nu neapărat închis) al tuturor celor 20 de vîrfuri, pe cînd celălalt caută să obțină o situație în care o parte dintre vîrfuri să rămînă neparcurse (de exemplu, linia frîntă *SZYXNPDCRQ*).

Jucătorii pot „trasa" linia frîntă, punînd pe rînd în vîrfurile corespunzătoare piese numerotate, albe și negre. Jocul va deveni mai complicat și mai interesant dacă în locul schemei *b*) se va folosi un dodecaedru din lemn cu inele fixate peste cepurile din vîrfurile sale.

Poate că cititorul va reuși să construiască teoria jocului demonstrînd că unul dintre parteneri trebuie să piardă inevitabil dacă adversarul său joacă corect (bineînțeles, trebuie considerate două variante, după cum jucătorul care determină „impasul" are piesele albe și pe cele negre).

Călătoria pe dodecaedru regulat poate fi înfocuită prin călătorii pe alte poliedre. Este interesant, de exemplu, că respectînd regulile jocului lui Hamilton, este imposibil să parcurgem toate vîrfurile unui dodecaedru rombic (vezi § 30), deoarece acesta are șase unghiuri solide cu patru fețe și opt unghiuri triedre, iar oricare dintre muchiile sale leagă între ele vîrfuri „de ordin diferit".

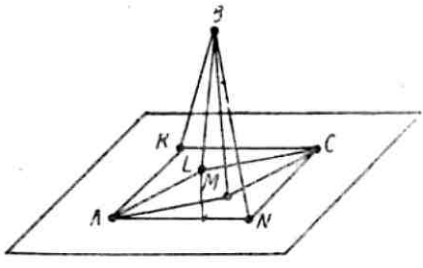


Fig. 118

În fig. 118 este redată o schemă spațială în care există parcursuri deschise, iar parcursurile închise sînt imposibile (de ce ?) ([75]).

Poate că cititorul va izbuti să găsească un poliedru avînd aceeași proprietate.

Hamilton a mai propus și un alt joc : călătoria pe fețele unui poliedru în care trecerea de pe o față pe alta este admisă numai în cazul cînd ele au o muchie comună.

Ii recomandăm cititorului să se convingă ([76]) că schema drumurilor după al doilea joc al lui Hamilton, făcut pe un octaedru regulat și pe un icosaedru regulat, nu se deosebește prin nimic de schema drumurilor din primul joc, efectuat pe un cub sau pe un dodecaedru regulat.

Problema calului din § 19 poate fi considerată ca o problemă a parcurgerii după regulile jocului lui Hamilton a tuturor punctelor

unei scheme : este suficient să înlocuim cîmpurile tablei prin puncte, eventual altfel aşezate, şi să unim prin linii punctele corespunzătoare cîmpurilor legate pe tabla de şah prin mutarea calului.

În fig. 119 sînt reprezentate o schemă plană (*a*) şi una spaţială (*b*) corespunzînd tablei cu 3×4 cîmpuri (*c*) şi tablei cu 4^2 cîmpuri (*d*).

§ 35. AŞEZAREA UNOR PUNCTE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU

De obicei, problemele de acest tip „se materializează", adică punctele se înlocuiesc cu monede, cu alune sau cu alte obiecte.

Vom cita cîteva probleme tipice :

1. 10 monede sînt dispuse în formă de triunghi echilateral (vezi fig. 120, *a*). Să se mute ([77]) trei monede în poziţii noi, astfel ca să obţinem iarăşi un triunghi echilateral.

2. În fig. 120, *b* se vede că nouă monede pot fi aşezate în trei rînduri de cîte trei monede, adică putem indica opt drepte conţinînd fiecare centrele a cîte trei monede.

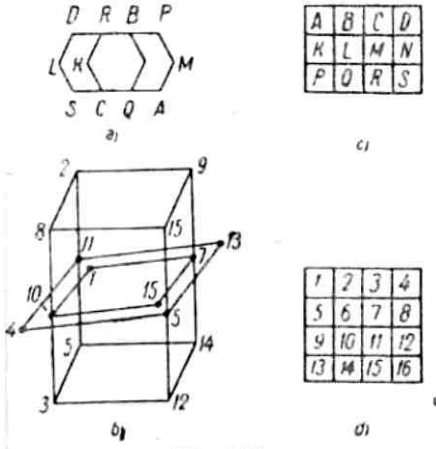


Fig. 119

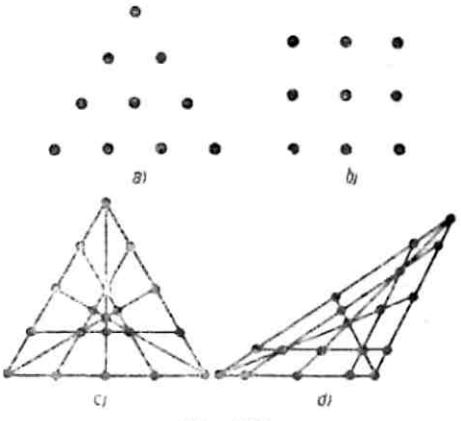


Fig. 120

Mutaţi ([78]) două monede astfel ca nouă monede să fie aşezate în 10 rînduri de cîte trei monede fiecare.

3. În fig. 120, *c*, *d* sînt date două scheme identice într-un ciclu, dar net diferite ca aspect exterior, pentru aşezarea a 19 monede în nouă şiruri de cîte cinci monede fiecare.

Repartizaţi 19 monede în 10 rînduri de cîte cinci ([79]).

Organizați împreună cu prietenii un concurs pentru găsirea unor repartiții a n puncte în m rînduri de cîte p puncte, astfel ca raportul mp/n să aibă o valoare cît mai mare (pentru a fixa ideile, trebuie impusă condiția ca n să nu fie mai mare decît un anumit număr n_0).

Incercați să studiați probleme analoge cu construirea unor pătrate magice. De exemplu : este oare posibil să dispunem numerele întregi de la 1 pînă la 19 în nodurile schemei *c*) din fig. 120, astfel ca suma numerelor de pe oricare din cele nouă drepte să fie egală ?

4. Așezați ([80]) în plan șase puncte astfel ca trei puncte oarecare să fie vîrfurile unui triunghi isoscel.

5. Așezați ([81]) în spațiu opt puncte astfel ca toate cele 56 de triunghiuri (C_8^3) cu vîrfurile în aceste puncte să fie isoscele.

Încercați să studiați problema așezării pe un desen a n puncte (pentru $n=7,\ 8,\ 9,\ \ldots$), astfel ca printre cele C_n^3 triunghiuri să avem cît mai multe isoscele. O problemă analogă (pentru $n=9,\ 10,\ 11,\ \ldots$) se poate pune și pentru spațiu.

Toate aceste probleme pot fi considerate în spațiul m-dimensional, dacă vom înțelege prin puncte ale spațiului m-dimensional mulțimi de cîte m numere reale, scrise într-o anumită ordine, iar distanța dintre punctele

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \text{ și } B(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$$

se calculează după formula

$$d=\sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+(\alpha_2-\beta_2)^2+\ldots+(\alpha_m-\beta_m)^2}.$$

6. Folosind această din urmă formulă, să se arate ([82]) că în spațiul cu patru dimensiuni fiecare triplet din următoarele cinci puncte

$$O(0,0,0,0),\ A(1,0,0,0),\ B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right),$$

$$C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, O\right) \text{ și } D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right)$$

reprezintă vîrfurile unui triunghi echilateral.

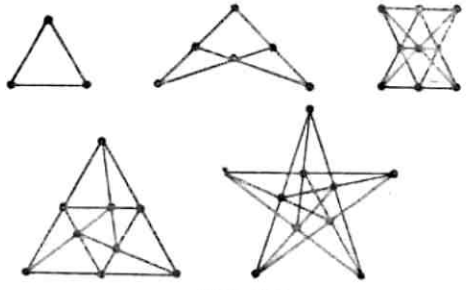


Fig. 121

Problemele 2 și 3 sînt legate de o problemă interesantă a geometriei proiective, anume construirea configurațiilor.

Se numește *configurație plană* (p_m, q_n) un sistem din p puncte și din q drepte, în care prin fiecare punct trec m drepte, iar fiecare dreaptă

trece prin n puncte (din cele date). Se demonstrează uşor ([83]) că trebuie să avem în mod necesar $pm = qn$. Dacă $p = q$ şi $m = n$, atunci în loc de (p_m, p_m) scriem pe scurt (p_m).

În fig. 121 sînt reprezentate configuraţiile (3_3), $(6_2, 4_3)$, (9_3), (9_3) şi (10_3). Este interesant că nu există, de exemplu, o configuraţie (7_3).

§ 36. PROBLEME DE JUDECATĂ

Problemele de judecată merită atenţie nu numai pentru caracterul lor atrăgător, ci şi pentru că rezolvarea lor, ca şi rezolvarea problemelor de matematică, contribuie la dezvoltarea imaginaţiei, a perseverenţei, a priceperii de a găsi în enunţul problemei „locul slab" a cărui folosire ne conduce pînă la urmă la soluţie. Citäm cîteva exemple tipice :

1. Un grup de elevi s-a împărţit în două tabere : cei „serioşi", care răspund corect la orice întrebare şi cei „glumeţi", care nu dau decît răspunsuri greşite.

Aflînd despre aceasta, profesorul l-a întrebat pe Ivanov dacă face parte dintre serioşi sau dintre glumeţi. Deoarece nu a deslușit răspunsul lui Ivanov, l-a întrebat pe Petrov şi pe Sidorov, vecinii lui Ivanov : „Ce mi-a răspuns Ivanov ?" Petrov a spus : „Ivanov a răspuns că este serios". Sidorov, dimpotrivă, a spus : „Ivanov a răspuns că e glumeţ". Ce erau Petrov şi Sidorov ? ([84]).

2. Şase elevi care participă la munca patriotică de duminică s-au împărţit în trei brigăzi. Brigadierii se chemau : Volodea, Petea, Vasia, Volodea şi Mişa au primit bîrne de cîte 2 m, Petea şi Kostea, bîrne de cîte $1\frac{1}{2}$ m, iar Vasia şi Alioşa bîrne de cîte 1 m ; ei au tăiat toate bîrnele în bucăţi de cîte $\frac{1}{2}$ m.

S-a scris apoi că brigadierul Lavrov împreună cu Rojkov, au tăiat 26 de bucăţi, brigadierul Galkin împreună cu Komkov 27 bucăţi, iar brigadierul Kozlov împreună cu Ievdokimov 28 de bucăţi. Cum îl cheamă pe Komkov ? ([85]).

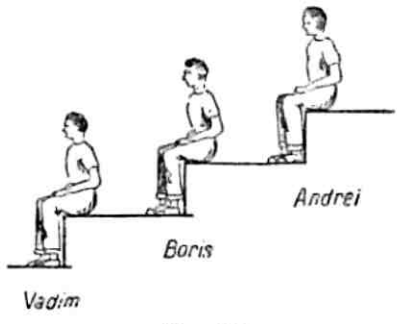


Fig. 122

3. Trei prieteni — Andrei, Boris şi Vadim — stăteau unul în spatele altuia, fără şepci (fig. 122), Boris şi Vadim neavînd dreptul să se uite înapoi ; Boris vedea capul lui Vadim aşezat dedesubtul lui, iar Andrei vedea capetele ambilor săi prieteni.

Dintr-un sac conținînd două căciuli albe și trei negre, fapt cunoscut de cei trei prieteni, i s-a pus în cap fiecăruia cîte o căciulă de culoare necunoscută (pentru el), iar două căciuli de culoare necunoscută (tuturor) au rămas în sac.

Andrei a declarat că nu poate stabili culoarea căciulii sale. Boris, auzind răspunsul lui Andrei, a spus că nu dispune de suficiente date pentru a determina culoarea căciulii sale. Putea oare Vadim, bazîndu-se pe răspunsurile prietenilor săi să deducă ce culoare avea căciula sa ? ([86]).

Trebuie menționate în mod special problemele pentru rezolvarea cărora este necesară o analiză minuțioasă a unui mare număr de date, cîteodată prea puțin legate (la prima vedere) de mărimile căutate. De exemplu :

4. Cinci elevi au luat parte la o cursă ciclistă. După cursă, cinci suporteri au declarat :

I. Serioja a ocupat locul al doilea, iar Kolea al treilea.

II. Nadia a ocupat locul al treilea, iar Tolea al cincilea.

III. Tolea a ocupat primul loc, iar Nadia al doilea.

IV. Serioja a ocupat locul al doilea, iar Vania al patrulea.

V. Kolea a ocupat primul loc, iar Vania al patrulea.

Știind că una din indicațiile fiecărui „suporter" este adevărată, iar cealălaltă falsă, să se afle repartiția efectivă a locurilor ([87]).

5. Șaisprezece studenți s-au întors la Leningrad după vacanța de iarnă. S-a constatat că printre ei sînt patru din Kiev, *A*, *B*, *C*, și *D*, patru din Moscova, *E*, *F*, *G* și *H*, patru din Saratov, *I*, *J*, *K* și *L*, și patru din Fergana *M*, *N*, *O* și *P*.

S-a mai constatat că *A*, *E*, *I* și *M* au împlinit de curînd 20 de ani, *B*, *F*, *J* și *N*, 21 de ani, *C*, *G*, *K* și *O* 22 de ani, iar *D*, *H*, *L* și *P* 23 de ani.

Printre ei erau patru matematicieni, patru chimiști, patru geologi și patru biologi, toți studenții de aceeași specialitate, fiind fiecare din orașe diferite și de vîrstă diferită.

Patru studenți erau în anul întîi, patru în al doilea, patru în al treilea și patru în al patrulea, toți „colegii de an" fiind din orașe diferite, de vîrstă diferită și de specialitate diferită.

In sfîrșit, s-a constatat că patru sînt fotbaliști pasionați, patru boxeri, patru voleibaliști și patru șahiști, toți patru care practică același sport fiind din orașe diferite, de vîrstă diferită, de specialități diferite și din ani diferiți.

Să se stabilească pentru fiecare student facultatea, anul și sportul practicat, știind că *I* este voleibalist, *F* fotbalist, *C* biolog, *D* matematician în anul I și șahist, *G* chimist în anul II și șahist, iar *J* geolog în anul III și șahist.

Pentru mai multă claritate, este comod să construim o tabelă. În căsuţele acestei tabele trebuie să trecem pentru fiecare student: facultatea, anul, sportul practicat. În tabelă sînt indicate datele cunoscute din enunţul problemei ; rămîne să completăm (88) locurile goale.

Vîrsta / Oraş	20 ani	21 ani	22 ani	23 ani
Kiev	*A*—,—,—.	*B*—,—,—.	*C* biol, —,—.	*D* mat. I, şah
Moscova	*E*—,—,—.	*F*—,—, fotbal.	*G* chim, II, şah	*H*—,—,—.
Saratov	*I* —,—, vol.	*J*. geol, III, şah	*K*—,—,—.	*L*—,—,—.
Fergana	*M*—,—,—.	*N*—,—,—.	*O*—,—,—.	*P*—,—,—.

Tot în rîndul problemelor de logică putem clasifica pe cele în care trebuie reconstituite cifre şterse sau descifrate, operaţii aritmetice în care cifrele sînt înlocuite cu litere.

Rezolvarea lor contribuie la dezvoltarea gîndirii logice, iar alcătuirea unor noi probleme de acelaşi tip poate servi ca subiect pentru „jocuri creatoare".

In cele patru exemple de mai jos, putem reconstitui, ţinînd seamă de toate circumstanţele, cifrele şterse şi descifra semnificaţiile literelor (într-un mod unic în fiecare exemplu) (89).

I) Să se reconstituie cifrele şterse din schemele următoarelor operaţii :

a)
$$\begin{array}{r|l} ******* & *** \\ \hline * & \\ \hline *** & \\ ** & \\ \hline 4*** & \\ **** & \\ \hline 0 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} ****** & *** \\ \hline **** & \\ \hline *** & \\ *** & \\ \hline **** & \\ **** & \\ \hline 0 & \end{array}$$

II) Să se afle valorile literelor în adunările numerelor de mai jos:

a)
$$\begin{array}{r} c\,\mu\,e\,x+ \\ \hline r\,o\,o\,\mu \\ \hline r\,p\,e\,u\,u \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \text{forty}+ \\ \text{ten} \\ \hline \text{ten} \\ \hline \text{sixty} \end{array}$$

în cadrul aceluiaşi exemplu, aceleaşi litere trebuie înlocuite mereu cu aceeaşi cifră, iar literle diferite prin cifre diferite).

Dintre problemele de acest tip fac parte şi aşa-numitele rebusuri aritmetice în care, luîndu-se drept „cheie" un anumit cuvînt format din 10 litere diferite şi înlocuind în gînd literele sale, în

ordinea în care figurează în el, cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, scriem în formă cifrată operația de împărțire a două numere de mai multe cifre. Se recomandă ca rebusul să fie dezlegat de un grup de mai multe persoane care scriu succesiv (la intervale de 2—3 minute) cifrele cîtului una după alta, produsele dintre aceste cifre și împărțitor, precum și resturile corespunzătoare, pînă cînd cineva dintre ei ce soluționează jocul reușește să afle „cheia" rebusului.

Să presupunem că s-a adoptat „cheia *merituoasă*" și că s-a cifrat cu ajutorul ei operația de împărțire a numărului 240 176 prin 119. După ce efectuează împărțirea „în cifre", „conducătorul jocului scrie operația în formă cifrată :

$$\begin{array}{l} \quad e\,i\breve{a}\,m\,o\,u \\ (1)\ \left\{ \begin{array}{l} e\,r\,a \\ \hline e\,m\,o \end{array} \right. \\ (2)\ \left\{ \begin{array}{l} m\,m\,s \\ \hline s\,a\,u \end{array} \right. \end{array} \qquad \begin{array}{|l} m\,m\,s \\ \hline \underset{\smile}{e}\ \underset{\smile}{\breve{a}\,m} \\ (1)\ (2) \end{array}$$

Intîi trebuie scrise literele marcate cu semnul (1) ; cu acest prilej, cei ce rezolvă jocul pot observa că din $e \cdot mms = era$ rezultă că $em < e$ și deci $m = 1$; se poate ghici, de asemenea, că litera următoare a cîtului va avea valoarea zero.

După ce au fost scrise literele marcate cu semnul (2), cei ce rezolvă jocul pot observa că $e = 2$ (emo — mms este un număr de două cifre, deci $e - m = 1$) și $a = 8$ (deoarece $\breve{a} = 0$ și $era + e = ei\breve{a}$).

Dacă cineva introduce literele în schema „cheii" căutate și ghicește că această „cheie" este cuvîntul „*merituoasă*", atunci literele rămase nedescifrate pot ulterior să confirme sau să infirme ipoteza lui (în cazul de față, să o confirme).

Dificultatea problemelor de acest tip crește considerabil dacă pentru cifrare alegem 10 litere diferite care nu formează „cuvînt-cheie".

Vom mai da trei probleme în rezolvarea cărora predomină elementul logic, dintre care ultima poate servi și ca o interesantă ilustrare la teoria ecuațiilor nedeterminate de gradul întîi.

Identificarea unei monede false

În ultimii ani și-au cîștigat o mare popularitate problemele pentru identificarea unei monede false care se deosebește de monedele normale numai prin greutatea ei.

În varianta cea mai simplă se cere ca prin k cîntăriri pe o balanță cu brațe egale (fără greutăți) să se pună în evidență unica

monedă falsă (care este mai ușoară) dintr-o grămadă care conține în total $n=3$ monede.

Aici este suficient ca împărțind monedele în trei grupe de cîte 3^{k-1} monede, să așezăm două grupe oarecare pe talerele balanței, ceea ce ne va indica imediat grupul de 3^{k-1} monede în care este conținută cea falsă.

Procedînd în același mod cu respectivul grup, aflăm grupul format din 3^{k-2} monede care conține pe cea falsă, etc. Sînt considerabil mai grele problemele în enunțul cărora nu se arată dacă moneda falsă este mai ușoară sau mai grea decît celelalte.

Dăm mai jos una dintre soluțiile posibile ale problemei.

Avem 12 monede dintre care una falsă. Cu ajutorul a trei cîntăriri, să se identifice această monedă și să se stabilească dacă este mai ușoară sau mai grea decît monedele bune.

Dacă la fiecare cîntărire vom pune cîte patru monede pe talerele balanței, așa cum se arată în coloanele a 2-a și a 3-a ale tabelei de mai jos

Nr. de cîntăriri	Monedele din stînga	Monedele din dreapta	Rezultatele posibile ale cîntăririi, pe coloane (Notații: e mai ușoară în stînga, g mai grea în stînga e aceeași greutate pe ambele talere)																						
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1.	1,2,3,4	5,6, 7, 8	s	s	s	s	g	g	g	g	e	e	e	e	g	g	g	g	s	s	s	s	e	e	e	e
2.	1,2,3, 5	4,9,10,11	s	s	s	g	s	e	e	e	g	g	g	e	e	g	g	s	g	e	e	e	s	s	s	e
3.	1,6,9,12	2,5, 7,10	s	g	e	e	g	s	g	e	s	g	e	s	g	s	e	e	s	g	s	e	g	s	e	g
Nr. monedei false	mai ușoară		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12												
	mai grea														1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

(sînt indicate numai numerele de ordine atribuite fiecărei monede), ne convingem ușor (verificați!) că în cazul cînd facem cele 24 de ipoteze posibile:

moneda falsă este mai ușoară și numărul ei de ordine este 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

și moneda falsă este mai grea, iar numărul ei de ordine este 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (vezi mai jos liniile tabelei), am obține 24 variante distincte de rezultate ale cîntăririi, indicate în coloanele numerotate ale tabelei.

Stabilind prin cîntărire care din aceste variante are loc, vom găsi în cele două linii de jos ale tabelei răspunsul la întrebările pe care le pune problema.

În prezent, problemele cu monede se generalizează în diverse direcţii şi constituie un exemplu de joc matematic care aşteaptă să i se construiască o teorie completă.

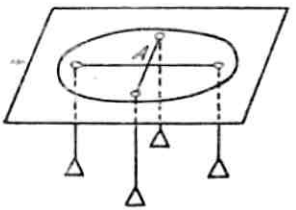


Fig. 123

Pentru a varia problema, am putea admite utilizarea unei balanţe „cu m talere" (fig. 123, unde $m=3$), permiţînd să stabilim printr-o singură „cîntărire" (după poziţia punctului nodal A) care dintre cele m grupe de monede este mai uşoară (sau mai grea) decît celelalte.

Problema separării lichidelor

Să cercetăm întîi problema care apare (într-o formulare oarecare diferită) la Chuquet (1484) sau la Tartaglia (1586).

Dintr-un vas plin cu capacitatea de 8 litri, trebuie să scoatem patru litri de vin, folosind două vase goale avînd capacităţile de 5 şi de 3 litri.

Să admitem că am turnat întîi în vasul de capacitate mijlocie cinci litri de vin. Dacă vom evita de acum înainte operaţiile vădit inutile, care lungesc soluţia problemei, obţinem uşor rezolvarea caracterizată prin schema

$$8,0,0\to 3,5,0\to 3,2,3\to 6,2,0\to 6,0,2\to 1,5,2\to 1,4,3\to 4,4,0.$$

Din această scheemă se vede că din vasul mare lichidul se toarnă de fiecare dată în vasul gol de capacitate mijlocie (pînă îl umplem), după care turnăm înapoi cantităţi egale cu capacitatea vasului mic.

Într-o altă variantă de rezolvare a problemei, vasul mic şi cel mijlociu îşi schimbă rolurile între ele : din vasul mare lichidul este vărsat în vasul gol de capacitate mai mică (pînă îl umplem) şi turnăm înapoi cantităţi egale cu capacitatea vasului mijlociu:

$$8,0,0\to 5,0,3\to 5,3,0\to 2,3,3\to 2,5,1\to 7,0,1\to 7,1,0\to 4,1,3\to 4,4,0.$$

Dacă în cazul general, vom nota capacităţile celor trei vase cu a, b, c (a este par, $a>b>c$ şi, bineînţeles, $b+c\geqslant a/2$), atunci dacă

b și c sînt prime între ele și dacă $a \geqslant b+c-1$, ambele procedee de mai sus ne conduc la soluție, ceea ce rezultă din faptul că ecuațiile

$$a - bx + cy = a/2 \text{ și } a - cu + bv = a/2,$$

care corespund respectiv celor două metode (vezi § 4) au soluții în numere întregi pozitive.

Dar, începînd cu cazul $a = b+c-2$, una dintre metode se poate dovedi inadecvată (de exemplu, dacă în cadrul primei metode ajungem la situația $(b-1, 0, c-1)$ nu vom mai putea să umplem din vasul mare, vasul mijlociu și nu vom mai putea să turnăm din vasul mic c litri de vin, dar, în acest caz, cealaltă metodă ne va duce neapărat la rezultat.

De exemplu, pentru $a=20$, $b=13$ și $c=9$, putem separa 10 litri de vin numai prin metoda a doua ([91]).

Pentru $a < b+c-2$, problema poate fi nerezolvabilă, lucru de care cititorul se poate convinge luînd, bunăoară, valorile $a=16$, $b=12$ și $c=7$ ([92]).

§ 37. DIVERSE

În paragraful de față am strîns cîteva probleme din diferite capitole ale matematicii ; unele dintre ele sînt accesibile unui cerc larg de cititori, altele se adresează persoanelor cu pregătire matematică. Într-o serie de cazuri va fi nevoie de creion, de hîrtie și de... perseverență. Unele probleme îi pot sugera cititorului subiecte pentru cercetări proprii.

DEDUCȚIA GEOMETRICĂ A FORMULEI

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+ \\ +n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Să presupunem că am dispus în n straturi (numărînd de jos în sus) n^2, $(n-1)^2$, ..., 3^2, 2^2, 1^2 cuburi de muchie egală cu 1 (în fig. 124, $n=5$).

Circumscriind întregii grămezi de cuburi piramida

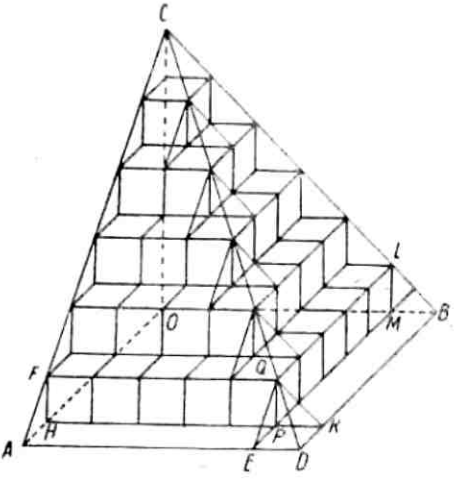


Fig. 124

$OADBC$, în care $OA=OB=OC=n+1$ (volumul ei este egal cu $\frac{(n+1)^3}{3}$), obținem că suma volumelor tuturor cuburilor este

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=\frac{(n+1)^3}{3}-$$

$$-[n+(n-1)+\ldots+3+2+1]-(n+1)\cdot\frac{1}{3}=$$

$$\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n+1}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

aici expresia cuprinsă între paranteze drepte este egală cu suma volumelor prismelor $AFHEPQ$ (volumul egal $n/2$); $KPQBML$ (volumul egal $n/2$) și ale prismelor analoge din toate celelalte straturi; $(n+1)\cdot\frac{1}{2}$ este suma volumelor micilor piramide ($EPKDQ$ etc.).

Încercați să demonstrați în mod similar că

$$1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots+(2n-3)^3+(2n-1)^3=\frac{n(4n^2-1)}{3}\cdot(93)$$

EXERCIȚII PENTRU DEZVOLTAREA „VEDERII GEOMETRICE"

Dăm mai jos cîteva probleme, potrivite pentru o competiție cu deviza „cine realizează mai mult?"

Pentru rezolvarea problemelor de acest gen este nevoie să lucrăm sistematic la numărarea figurilor de formă dată ce se pot distinge pe un desen dat; în problema nr. 4 trebuie să ne gîndim cu atenție în ce ordine urmează să luăm figurile de forma menționată, pentru ca să nu omitem nici una.

Cititorul va putea inventa destul de ușor mai multe probleme analoge.

1. Cîte triunghiuri, pătrate și dreptunghiuri se pot vedea în fig. 125, *a*? (94)

2. Să se determine numărul de triunghiuri din fig. 125, *b* (95).

3. Cîte triunghiuri, hexagoane regulate și romburi există în fig. 125, *c*? (96)

4. Cîte pătrate și cîte dreptunghiuri se pot vedea pe o tablă de șah obișnuită? pe o tablă cu n^2 cîmpuri? pe o tablă cu $m\times n$ cîmpuri?

Cîte cuburi și cîte paralelipipede dreptunghice se pot vedea într-un cub cu muchia de 10 cm, tăiat prin plane paralele cu fețele cubului, în cuburi cu muchia de cîte 1 cm? (97)

5. În cîte feluri putem citi cuvîntul *CAPAC* mergînd pe potecile drepte, curbe și frînte (fig. 125, *d*), dacă litera *c* nu trebuie să fie în același timp și inițială și finală ? (98)

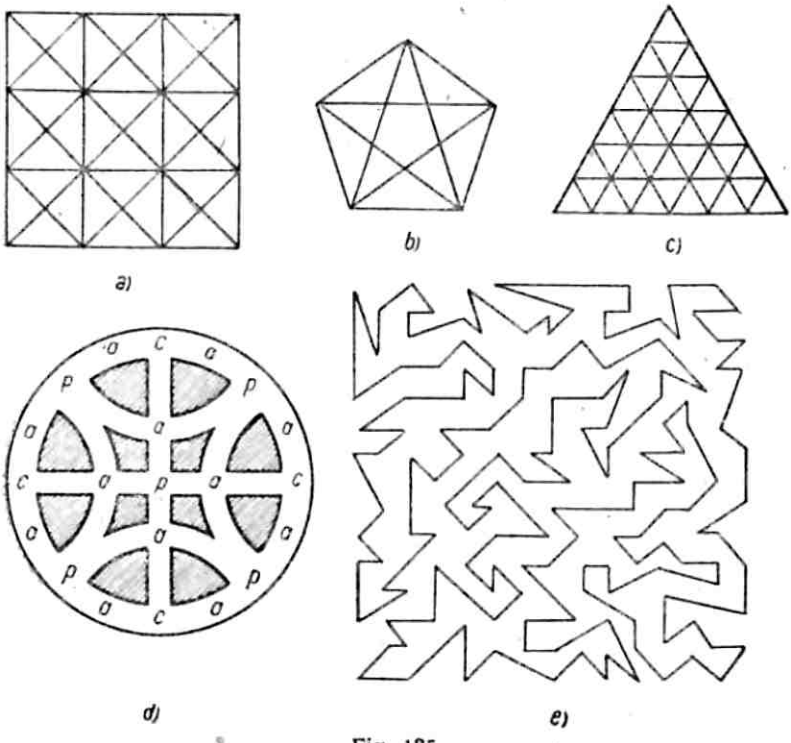


Fig. 125

Mai amintim un joc care se poate face cu un poligon arbitrar, mărginit de o linie frîntă neconvexă foarte complicată (vezi, de exemplu, fig. 125, *e*) ; marcîndu-se pe desen un anumit punct, trebuie pe cît se poate de repede să determinăm unde se află punctul respectiv (în interiorul poligonului sau în exteriorul lui).

Identități interesante

1. Se verifică ușor că $(3s^{2n} - 2s^n - 1)^2 + (4s^{2n} + 4s^n)^2 \equiv (5s^{2n} + 2s^n + 1)^2$. Prin urmare, cu ajutorul formulelor $a_n = 3s^{2n} - 2s^n - 1$; $b_n = 4s^{2n} + 4s^n$; $c_n = 5s^{2n} + 2s^n + 1$ (unde s și n sînt numere naturale și $s > 1$), putem obține oricîte triplete de numere pitagorice (vezi § 5).

Unghiurile unui triunghi dreptunghic de laturi a_n, b_n, c_n diferă oricît de puțin, pentru valori suficient de mari ale lui n, de unghiurile triunghiului cu laturile 3, 4, 5, deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3s^{2n}-2s^n-1}{4s^{2n}+4s^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{s^n}-\frac{1}{s^{2n}}}{4+\frac{4}{s^n}}=3/4.$$

Încercați să găsiți o identitate analogă care să conducă la triunghiuri dreptunghice cu laturi avînd ca lungime numere întregi și care să fie „aproape asemenea" cu triunghiul de laturi 5, 12, 13.

2. Găsiți identități în care produsul a două polinoame „greoaie" să fie egal cu un polinom cu număr mic de termeni, de exemplu : $(x^8-4x^7+8x^6-10x^5+8x^4-4x^3+2x^2-x+\frac{1}{4})\,(x^8+4x^7+8x^6+10x^5+8x^4+4x^3+2x^2+x+\frac{1}{4})\equiv x^{16}+\frac{17}{2}\,x^8+\frac{1}{16}$.

3. Identitatea $\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}\equiv\frac{a+b}{a+(a-b)}$ (verificați !) poate fi folosită pentru „simplificări nepermise" care conduc la rezultate corecte, de exemplu,

$$\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3}=\frac{37+13}{37+24}=\frac{50}{61}\text{ etc.}$$

Veți izbuti oare să găsiți identități analoge în care la numărător și la numitor „să se simplifice" exponenții puterii a patra ?

4. Identitatea $\dfrac{\lg\left(\frac{m+1}{m}\right)^m}{\lg\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}=\dfrac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^m}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}$ (unde m este un număr rațional pozitiv) arată că uneori „simplificarea nepermisă a simbolului lg" : $\frac{\lg a}{\lg b}=\frac{a}{b}$ poate da un rezultat corect. De exemplu, $\frac{\lg\frac{9}{4}}{\lg\frac{27}{8}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{27}{8}}$ (aici $m=2$).

5. Identitatea $\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}\equiv a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}$ conduce la o serie de egalități curioase ; de exemplu, $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$; $\sqrt[4]{5\frac{5}{624}}=5\sqrt[4]{\frac{5}{624}}$; $\sqrt[5]{2\frac{2}{31}}=2\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$ etc.

6. Simplificînd simbolul „sin" într-un mod nepermis, întîi la numărătorul și la numitorul fracției din membrul doi al identității

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha\equiv\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

iar apoi ambii membri ai egalității astfel obținute, ajungem la identitatea

$$\alpha+2\alpha+\ldots+n\alpha=\frac{\frac{n+1}{2}\alpha\cdot\frac{n}{2}\alpha}{\frac{\alpha}{2}}.$$

Verificați această identitate.

7. Să se demonstreze ([100]) că $[3(10^k+10^{k-1}+\ldots+10^2+10+1)n+1]^2\equiv n^2(10^{k+1}+10^k+\ldots+10^{k+1})+(6n-n^2)(10^k+10^{k-1}+\ldots+10+1)+1$.

Această identitate ne conduce la două serii de egalități numerice interesante: pentru $n=1$ și $k=1, 2, 3, 4, \ldots$ avem $34^2=1\,156$; $334^2=111\,556$; $3334^2=11\,115\,556$; $33\,334^2=1\,111\,155\,556$ etc; pentru $n=2$ și $k=1, 2, 3, 4, \ldots$ avem $67^2=4\,489$; $667^2=444\,889$; $6667^2=44\,448\,889$; $66\,667^2=4\,444\,488\,889$ etc.

Ați izbuti oare să găsiți identități care conduc la serii analoge de egalități numerice în alte sisteme de numerotație?

Iluzii optice

Încercați, unind, la o distanță de 35—50 *cm* în fața ochilor, vîrfurile degetelor arătătoare, astfel încît să se afle unul în continuarea celuilalt, să vă uitați „printre degete" spre un perete mai îndepărtat. Veți avea impresia că între degete este prinsă o „sardea" mică care, dacă îndepărtați puțin degetele, va rămîne „atîrnată" în aer.

Lungimea „sardelei" va fi cu atît mai mare cu cît obiectul la care vă uitați „printre degete" este mai îndepărtat. Numărul de „sardele" poate fi mărit dacă uniți capetele cîtorva degete de la ambele mîini.

Acest fenomen amuzant are o explicație foarte simplă: cu ochiul drept nu vedem partea din perete mărginită de liniile ABC și KLM (fig. 126, *a*, *b*), iar cu cel stîng partea de perete mărginită de liniile $AB'C$ și $KL'M$. Rezultatul este că partea din perete pe care nu o vedem de loc va avea forma figurii haşurate 126, *a*, *b*.

Din aceeaşi cauză, o fantă verticală îngustă, tăiată în faţa *KLMN* a unei cutii avînd aproximativ dimensiunile de $10 \times 15 \times 30$ cm^3 (vezi fig. 126, *c*) va fi percepută sub forma a două fante paralele (sau ca o fantă mai lată cu o punte verticală), dacă ne vom uita prin fantă cu ambii ochi pe un perete situat în partea „feţei absente" *ABCD*.

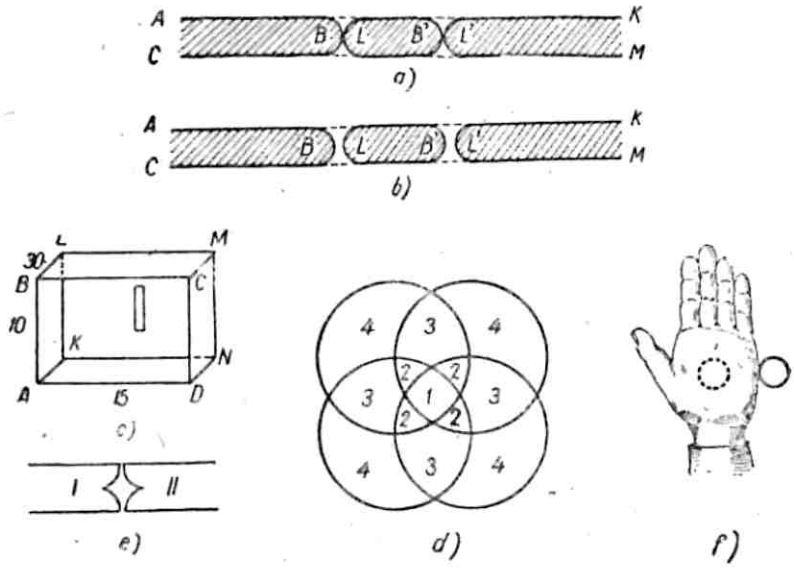


Fig. 126

Dacă înlocuim fanta din faţa *KLMN* prin patru orificii punctiforme, situate în vîrfurile unui pătrat, iar în locul feţei *BACD* aşezăm o casetă cu o placă fotografică, atunci fotografiind cu ajutorul unei astfel de „camere obscure" un cerc luminos situat pe un fond negru, am obţine (la dimensiuni corespunzătoare ale cercului) o „rozetă" (vezi fig. 126, *d*) în care intensitatea nuanţelor luminoase ar descreşte pe măsura creşterii numărului de ordine al regiunii.

O astfel de fotografie ne poate da o idee despre ceea ce ar vedea o fiinţă cu patru ochi care ar privi printr-un orificiu circular din faţa *NKLM* un perete iluminat uniform (în partea „feţei absente" *ABCD*), dacă senzaţiile vizuale ale fiecărui ochi în parte s-ar „suprapune" în conştiinţa sa.

Pentru a varia jocul, putem înlocui degetele prin două benzi de carton I şi II (în contact sau la o mică distanţă una de cealaltă) cu diverse profiluri (fig. 126, *e*) ; în locul fantei verticale cu margini paralele (fig. 126, *c*), putem lua fante cu diverse profiluri. Foto-

grafiind diverse obiecte și alegînd în diverse moduri orificiile punctiforme din camera obscură, fotografii amatori pot încerca să obțină „fotografii geometrice" curioase.

În încheiere, mai menționăm o iluzie optică interesantă : dacă privim cu ochiul drept un obiect printr-o țeavă, iar cu palma mîinii stîngi, tangentă la țeavă, ecranăm obiectul pentru ochiul stîng, vom avea impresia că vedem obiectul și cu ochiul stîng printr-o „gaură din palmă" (fig. 126, *f*).

Probleme diverse

Vom începe cu cîteva probleme și întrebări simple :

1. Într-un pahar am avut m cm^3 de apă, iar în altul, n cm^3 de alcool. Întîi am turnat din primul pahar în al doilea a cm^3 de apă și apoi (după ce am amestecat cu grijă), am turnat înapoi a cm^3 din amestec.

Considerînd, pentru simplitate, că volumul amestecului este egal cu volumele lichidelor amestecate, să se stabilească ce va fi adăugat mai mult (ca volum) ; alcool în primul pahar sau apă în al doilea ? ([101])

2. Petrov a fost întrebat : „Pe cine reprezintă portretul din perete ?" Petrov a răspuns : „Tatăl celui din perete este unicul fiu al tatălui celui care vorbește". Pe cine reprezintă portretul ? ([102])

3. Cîți străbunici și cîte străbunice au avut în total toate străbunicele și toți străbunicii noștri ? ([103])

4. Cît de mare va părea un unghi de 15′ dacă-l privim printr-o lupă care mărește de patru ori ? ([104])

5. Cu cît la sută crește puterea de cumpărare a populației, dacă prețurile tuturor mărfurilor se reduc cu 20% ? ([105])

6. Dacă prima dată puterea de cumpărare a populației a crescut cu 20%, iar apoi cu 25%, cu cît la sută a crescut în total puterea de cumpărare ? ([105a])

7. De cîte ori în 24 de ore formează acele ceasornicului un unghi drept ? ([106])

8. Cînd Kolea era tot atît de tînăr ca și Olea,
Avea tot atîția ani mătușa Polea
Cît au acum Kolea împreună cu Olea.
Cîți ani avea Kolea
Cînd mătușa Polea
Era de vîrsta lui Kolea ? ([107])

9. Un aviator decolează din punctul A și după ce a zburat 800 km (pînă la punctul B) spre sud, s-a îndreptat spre est. După ce a mai parcurs 800 *km* (pînă în punctul C), a văzut pe pămînt un urs. Ce culoare avea ursul, dacă se știe că $AB = AC$? ([108])

10. *A* și *B* au vîndut o cireadă de boi, primind pentru fiecare bou atîtea ruble cîți boi erau în cireadă. Vrînd să împartă egal banii obținuți, au luat din suma căpătată fiecare pe rînd cîte 10 ruble. *A* a primit 10 ruble în plus și drept compensație a adăugat la rest punga sa. Ce valoare avea punga? ([109])

11. Trei bărbați au intrat cu soțiile lor într-un magazin. Fiecare dintre cei șase a cumpărat mai multe obiecte plătind pentru fiecare dintre ele atîtea ruble cîte obiecte cumpărase.

Fiecare soț a cheltuit cu 45 de ruble mai mult decît soția sa; Iuri a cheltuit cu 525 de ruble mai mult decît Olga, iar Loghin cu 13 ruble mai mult decît Nina. Ceilalți doi se chemau Aleksandr și Tatiana.

Cine cu cine este căsătorit și cîte obiecte a cumpărat fiecare? ([110])

12. Un tată împarte între copiii săi o sumă de bani, dînd celui dintîi o rublă și $\frac{1}{6}$ din rest, celui de al doilea două ruble și $\frac{1}{6}$ din noul rest, celui de al treilea, trei ruble și $\frac{1}{6}$ din noul rest etc.

Cunoscînd că toți banii (S ruble) au fost împărțiți egal între toți copiii, să se determine S și numărul copiilor.

Este semnificativ că egalînd între ele părțile căpătate de fiecare copil, vom obține un sistem de ecuații compatibile cu necunoscuta S, care ne dă rădăcina $S=25$. Această proprietate o are ([111]) pătratul oricărui număr natural; scăzînd din n^2 întîi 1 și apoi $\frac{1}{n+1}$ din rest, apoi 2 și $\frac{1}{n+1}$ din noul rest etc., obținem un șir de rezultate egale.

Nu va izbuti oare cititorul să găsească o altă clasă de numere ale cărei proprietăți specifice să poată servi ca izvor pentru o serie de probleme distractive?

13. Pavel și, în același timp cu el, Gleb (pe motocicleta condusă de Iuri) au pornit din M spre N. După ce a parcurs o parte a drumului, Gleb a mers pe jos, iar Iuri s-a întors ca să-l ia pe Pavel și a ajuns în punctul N în același timp cu Gleb.

Știind că $MN=S$ *km*, și că viteza unui pieton este de u *km/h* iar viteza motocicletei v *km/h*, să se afle timpul în care cei trei tovarăși au mers din M la N ([112]).

Problema poate fi generalizată, considerînd, de exemplu, că motociclistul (sau doi motocicliști care se deplasează cu vitezele de v_1 *km/h* și v_2 *km/h*) trebuie să ajute un grup de n tovarăși să ajungă în același timp la locul de destinație; se poate considera de asemenea că unul dintre motocicliștii care îi ajută pe pietoni poate să ia deodată doi pasageri etc.

Încercați să construiți discuția diverselor variante ale problemei, întocmind de fiecare dată graficul mișcării întregului grup.

14. O lucrare a fost începută după ora 4 și terminată după ora 7, indicațiile ceasornicului la începerea și la terminarea lucrării trecînd una în cealaltă dacă schimbăm între ele locurile acului orar și al minutarului.

Să se determine durata lucrării și să se arate că la începutul și la sfîrșitul lucrării acele ceasornicului erau egal înclinate pe direcția verticală. ([113])

15. De cîte ori în 24 ore au indicațiile ceasornicului proprietatea că permutînd între ele acul orar și minutarul ajungem la o indicație cu sens a ceasornicului? ([114])

16. Să se demonstreze că pentru orice număr natural k, numărul total de cifre în șirul de numere $1, 2, 3, \ldots, 10^k - 1, 10^k$ este egal cu numărul de zerouri din șirul de numere $1, 2, 3, \ldots, 10^{k+1} - 1, 10^{k+1}$ ([115]).

17. Să se demonstreze că o figură plană S, de formă arbitrară, a cărei arie este mai mică decît 1 cm^2, poate fi așezată pe o hîrtie cu pătrățele de cîte 1 cm^2 astfel ca ea să nu acopere nici un nod. ([116])

18. Este oare posibil să ducem o dreaptă care să intersecteze dreptele date l_1, l_2, l_3, l_4, dispuse în mod arbitrar în spațiu? ([117])

19. Între dreapta l și cercul C_0, tangent la dreapta l, se introduce un șir de cercuri: C_1, C_2, C_3, ... (vezi fig. 127), astfel ca C_{k-1} să fie tangent la cercurile C_k și C_0, precum și la dreapta l.

Să se afle raza cercului C_{1000}, dacă raza cercului C_0 este de 1 km, iar raza cercului C_1 de 1 *mm* ([118]).

20. Să se demonstreze că o rază luminoasă, după ce se reflectă consecutiv pe trei oglinzi plane perpendiculare două cîte două, „se transformă" într-o rază paralelă cu „raza incidentă" dar orientată în sens contrar ([119]).

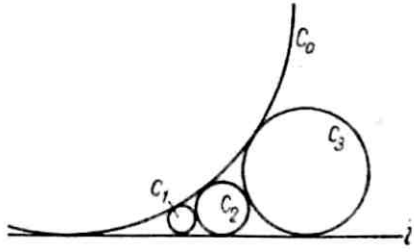


Fig. 127

21. Cum trebuie orientată o rază luminoasă într-un paralelipiped dreptunghic avînd fețe reflectante pentru ca după ce raza s-a reflectat pe toate cele șase fețe ea să revină în punctul inițial? ([120]).

22. Un pilot a parcurs 2 000 km spre sud, 2 000 km spre est și 2 000 km spre nord, după care a reajuns în punctul de plecare. De unde a decolat? (Problema are multe soluții.) ([121]).

23. Un avion decolează la Leningrad și, după ce a zburat a *km* spre nord, a *km* spre est și a *km* spre sud, ajunge la distanța de $3a$ *km* la est de Leningrad. Să se afle a ([122]).

24. Ce arie ar avea pe Pămînt un triunghi echilateral dacă fiecare dintre unghiurile sale ar fi de 72°? Este vorba aici despre un *triunghi sferic*, format de arcele de cerc mare care trec prin virfurile triunghiului ([123]).

25. Să se determine unghiurile unui triunghi sferic echilateral cu latura de 1 *km*, desenat pe suprafața perfect netedă a gheței care acoperă un lac. ([124])

Probleme de ingeniozitate

1. Să se arate că de la „împletitura" *a*) din fig. 128 putem trece, fără a rupe inelele de sfoară, la împletitura *b*).

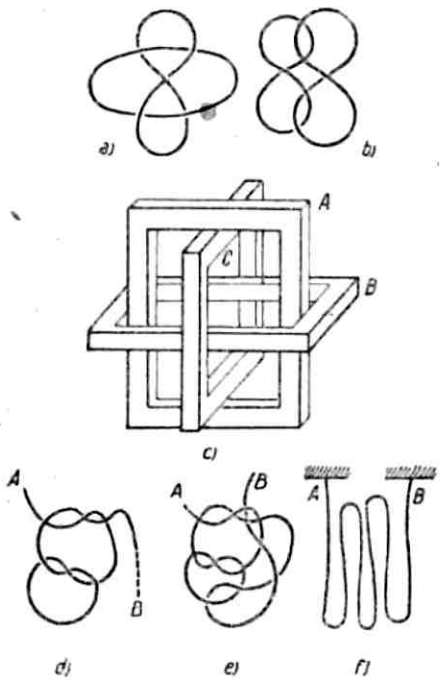


Fig. 128

2. Cum trebuie înlănțuite trei inele de sfoară pentru ca tăindu-l pe oricare dintre ele să le putem desface pe celelalte două fără a mai rupe un alt inel?

Să se rezolve aceeași problemă pentru n inele de sfoară ([125]).

3. Dacă interpretăm ceva mai liber cuvîntul „interior", putem rezolva următoarea problemă amuzantă: să se afle trei corpuri perfect identice A, B, C, care să poată fi astfel așezate încît A să fie în interiorul lui B, B în interiorul lui C și C în interiorul lui A.

Condițiile problemei sînt satisfăcute de trei rame ușor alungite, „introduse una într-alta" (fig. 128, *c*).

Problema analogă poate fi rezolvată și pentru cazul a n corpuri identice. Fie n șerpi (ni-i putem reprezenta sub forma unor săculețe „conice" înguste și cu pereți subțiri), dispuși într-un cerc de rază R; fiecare dintre ei începe să înghită șarpele aflat în fața lui, „viteza de înghițire" fiind aceeași pentru toți șerpii (vezi fig. 129, *a*, unde $n=2$).

Cînd fiecare şarpe va fi înghiţit jumătate din lungimea victimei sale, vom obţine un inel în două straturi de rază $R/2$ (fig. 129, *b*) ; cînd fiecare şarpe va fi înghiţit în proporţie de 99%, inelul de rază R/100 va avea 100 de straturi etc.

4. Legaţi o sfoară întîi sub forma nodului *d*) (fig. 128), şi trecînd apoi la nodul *e*), vă convingeţi uşor, trăgînd de capetele *A* şi *B* că în ultimul caz sfoara nu mai are nici un nod.

Prin urmare, în cazul cînd capetele *A* şi *B* sînt fixate, sfoara (*f*) poate fi „înnodată" aşa cum se arată în *e*). Încercaţi să o faceţi !

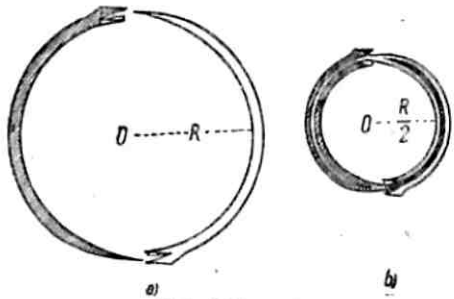


Fig. 128

§ 38. NOTE ŞI RĂSPUNSURI LA PROBLEME

(1) Fie $0,(a_1a_2\ldots a_{s-1}a_s)_{(k)}=\alpha$; să notăm cu N numărul care formează perioada acestei fracţii : $a_1a_2\ldots a_{s-1}a_{s(k)}=N$.

Atunci $\alpha=\frac{a_1}{k}+\frac{a_2}{k^2}+\ldots+\frac{a_{s-1}}{k^{s-1}}+\frac{a_s}{k^s}+\frac{a_1}{k^{s+1}}+\frac{a_2}{k^{s+2}}+\ldots+$

$$+\frac{a_{s-1}}{k^{2s-1}}+\frac{a_s}{k^{2s}}+\ldots=\frac{a_1k^{s-1}+a_2k^{s-2}+\ldots+a_s}{k^s}+$$

$$+\frac{a_1k^{s-1}+a_2k^{s-2}+\ldots+a_s}{k^{2s}}+\ldots=\frac{N}{k^s}+\frac{N}{k^{2s}}+\frac{N}{k^{3s}}+\ldots=$$

$$=\frac{N}{k^s-1}=\frac{N}{\overline{k-1}\ \overline{k-1}\ \ldots\ \overline{k-1}\ \overline{k-1}_k}$$

(la numitor avem un număr de s cifre, scris cu s cifre „$k-1$").

(2) Să admitem că în sistemul de numeraţie cu baza k se extrage rădăcina patrată a numărului de patru cifre $N=abcd_{(k)}$ (a, b, c, d sînt cifrele numărului N, scris în sistemul cu baza k ; în cele ce

urmează, vom omite indicele „k"). Dacă prima cifră α a rădăcinii căutate a fost obținută, adică $\alpha^2 \leqslant ab = ak + b < (\alpha+1)^2$, atunci

$$\sqrt{a\,b\,c\,d} = \alpha \ldots$$

$$\frac{\alpha^2}{a'b'cd}$$

Evident, $N = abcd = \alpha^2 k^2 + a'b'cd$.

Acum trebuie să aflăm cifra cea mai mare β pentru care $(\alpha k + \beta)^2 = \alpha^2 k^2 + 2\alpha k\beta + \beta^2 \leqslant N$, sau $(2\alpha k + \beta)\beta \leqslant N - \alpha^2 k^2 = a'b'cd$, adică se caută cifra cea mai mare β care, adăugată în dreapta numărului 2α va da un număr (egal cu $2\alpha k + \beta$) al cărui produs cu β nu este mai mare decît restul $a'b'cd$. Dar tocmai aceasta este regula după care ne conducem și la extragerea rădăcinii pătrate în sistemul de numerație zecimal.

Dacă la extragerea rădăcinii dintr-un număr împărțit în trei grupe, notăm cu α numărul de două cifre obținut cum s-a arătat mai sus la extragerea rădăcinii din cele două grupe de ordin mai mare, iar cu β numărul de unități căutat, atunci întregul nostru raționament rămîne în vigoare. Pentru numerele despărțite în patru grupe, căutăm întîi rădăcina primelor trei grupe de ordin mai mare iar apoi, după metoda indicată, cifra unităților rădăcinii căutate etc.

(3^a) $2\,713 = 41\,323_{(5)} = 41\,33\overline{2}_{(5)} = 41\,42\overline{2}_{(5)} = \overline{1}12\;12\overline{2}_{(5)}$

Proba : $1\overline{1}2\;1\overline{2}2_{(5)} = 5^3 - 5^2 + 2 \cdot 5^3 - 5^2 - 2 \cdot 5 - 2 = 2\,713$; $409 = 3\,114_{(5)} = 1\overline{2}\;12\overline{1}_{(5)}$.

(3^b) Fie $N = abc_{(8)} = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c$, unde fiecare dintre cifrele a, b, c, nu este mai mare de 7.

Dacă $a = \alpha_1\alpha_2\alpha_3{}_{(2)}$, $b = \beta_1\beta_2\beta_3{}_{(2)}$, $c = \gamma_1\gamma_2\gamma_3{}_{(2)}$, unde fiecare dintre cifrele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ este egală fie cu 0, fie cu 1, atunci avem

$$N = (\alpha_1 \cdot 2^2 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3) \cdot 2^6 + (\beta_1 \cdot 2^2 + \beta_2 \cdot 2 + \beta_3) \cdot 2^3 +$$

$$+ (\gamma_1 \cdot 2^2 + \gamma_2 \cdot 2 + \gamma_3) = \alpha_1 \cdot 2^8 + \alpha_2 \cdot 2^7 + \alpha_3 \cdot 2^6 + \beta_1 \cdot 2^5 +$$

$$+ \beta_2 \cdot 2^4 + \beta_3 \cdot 2^3 + \gamma_1 \cdot 2^2 + \gamma_2 \cdot 2 + \gamma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3{}_{(2)}.$$

Citind aceste egalități de la dreapta spre stînga, obținem regula de trecere de la sistemul de numerație binar la cel cu baza 8 : numerele de trei cifre care se obțin prin despărțirea pe grupe (de la dreapta spre stînga) a unui număr scris în sistemul binar dau cifrele aceluiași număr scris în sistemul de numerație cu baza 8.

(4^1) Pentru orice $k > 5$ avem $123\,454\,321_{(k)} = 11\,111^2_{(k)}$.

([5]) Deoarece $N \leqslant 1\,000 < 1\,024 = 2^{10}$, pentru a scrie numărul N în sistemul binar, vom avea nevoie de cel mult 10 cifre egale fiecare fie cu 0, fie cu 1.

Pentru determinarea lui N este suficient să punem 10 întrebări. 1) Va fi oare prima cifră din dreapta a numărului N scris în sistemul binar egală cu 1 ? 2) Va fi oare cifra a doua 1 ? etc.

([6]) Se verifică ușor că teorema este adevărată pentru $s=1$ și pentru $s=2$. Pentru demonstrarea teoremei în cazul general, vom aplica metoda inducției matematice : presupunînd că teorema este adevărată pentru $s=n$ (adică pentru numerele de la 1 pînă la 2^n-1, avem n cartoane conținînd fiecare cîte 2^{n-1} numere), vom demonstra că ea va fi adevărată și pentru $s=n+1$.

Un număr arbitrar m, care satisface condițiile $2^n \leqslant m \leqslant 2^{n+1}-1$ poate fi scris sub forma $m=2^n+x$, unde $0 \leqslant x \leqslant 2^n-1$. Toate aceste 2^n numere vor figura în cartonul nr. $n+1$ cu titlul 2^n ; în diversele cartoane precedente, oricare dintre numerele m va figura numai pentru $1 \leqslant x \leqslant 2^n-1$ (în funcție de termenii de forma 2, în care se descompune numărul x) ; prin urmare, în fiecare dintre cartoanele precedente, vor apărea 2^{n-1} numere noi (deoarece am presupus că teorema este valabilă pentru $s=n$). Ca rezultat, fiecare cele $n+1$ cartoane va conține cîte 2^n numere.

([7]) După cum se știe,

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot \qquad (1)$$

Dacă luăm unul cîte unul acești factori, atunci, la fiecare p_1 „pași" vom întîlni factori care sînt multipli ai numărului prim p_1 ; numărul lor este $\left[\frac{n}{p_1}\right]$, dar dintre aceștia $\left[\frac{n}{p_1^2}\right]$ factori sînt divizibili prin p_1^2, $\left[\frac{n}{p_1^3}\right]$ sînt divizibili prin p_1^3 etc.

Prin urmare numărul de factori din egalitatea (1) în care factorul p_1 intră exact o dată, de două ori, de trei ori etc., va fi respectiv egal cu numerele $\left[\frac{n}{p_1}\right]-\left[\frac{n}{p_1^2}\right]$, $\left[\frac{n}{p_1^2}\right]-\left[\frac{n}{p_1^3}\right]$, $\left[\frac{n}{p_1^3}\right]-\left[\frac{n}{p_1^4}\right]$ etc. De aceea,

$$\alpha=\left[\frac{n}{p_1}\right]-\left[\frac{n}{p_1^2}\right]+2\left\{\left[\frac{n}{p_1^2}\right]-\left[\frac{n}{p_1^3}\right]\right\}+3\left\{\left[\frac{n}{p_1^3}\right]-\left[\frac{n}{p_1^4}\right]\right\}+\cdots=\left[\frac{n}{p_1}\right]+\left[\frac{n}{p_1^2}\right]+\left[\frac{n}{p_1^3}\right]+\cdots$$

(8) $N=2^{4561}-2^{2280}$; aici scăzătorul este de multe milioane de ori mai mic decît descăzutul. Deoarece $1g\ 2^{4561}=4561\cdot 0{,}301029996\approx$ $\approx 1372{,}997$, înseamnă că 2^{4561} (deci și N) conține 1 373 cifre.

(9) $$S(N)=(1+2+2^2+\cdots+2^{\alpha})\{1+(2^{\alpha+1}-1)\}=$$
$$=\frac{2^{\alpha+1}-1}{2-1}\cdot 2^{\alpha+1}=2\cdot 2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)=2N.$$

(10) $$\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{7^2}\right]+\left[\frac{1000}{7^3}\right]=142+20+2=164.$$

$\left[\frac{100}{7}\right]+\left[\frac{100}{7^2}\right]=14+2=16$; deoarece numărătorul este egal cu (1 000 !) : (100 !), avem $k=164-16=148$.

(11) Dacă două numere N de cîte s cifre, scrise unul după celălalt, dau un număr de $2s$ cifre, care reprezintă un patrat perfect, înseamnă că

1) $10^{s-1}\leqslant N<10^{s}$ și

2) $(10^{s}+1)\cdot N$ este un pătrat perfect.

Dar atunci $10^{s}+1$ trebuie să fie divizibil prin patratul unui număr întreg (altfel valoarea cea mai mică a lui N, care satisface condiția a doua, va fi 10^{s+1}, ceea ce contrazice prima condiție).

Determinarea celei mai mici valori a lui s, pentru care $10^{s}+1$ este divizibil prin p^2 se realizează comod, folosind proprietățile congruențelor (vezi § 3), anume căutînd cea mai mică rădăcină a congruenței $10^{s}\equiv -1 \pmod{p^2}$; de exemplu, pentru $p=11$, avem

$10^{2}\equiv -21 \pmod{121}$; $10^{3}\equiv -210\equiv 32 \pmod{121}$;

$10^{4}\equiv 320\equiv 78 \pmod{121}$; $10^{5}\equiv 780\equiv 54 \pmod{121}$;

$10^{6}\equiv 540\equiv 56 \pmod{121}$; $10^{7}\equiv 560\equiv 76 \pmod{121}$;

$10^{8}\equiv 760\equiv 34 \pmod{121}$; $10^{9}\equiv 340\equiv -23 \pmod{121}$;

$10^{10}\equiv -230\equiv 12 \pmod{121}$; $10^{11}\equiv 120\equiv -1 \pmod{121}$.

Evident, $(10^{11}+1)\left|\frac{10^{11}+1}{11^2}k^2\right|$ este un pătrat perfect dacă k este un număr natural arbitrar. Se verifică ușor că 4 este cea mai mică valoare a lui k, care transformă expresia cuprinsă în parantezele pătrate într-un număr de 11 cifre egal cu 13 223 140 496.

Prin verificare directă ne putem convinge că o congruență de forma $10^{s}\equiv 1 \pmod{k^2}$, unde k este un număr prim arbitrar, nu este satisfăcută pentru $s<11$; prin urmare, 1 322 314 049 613 223 140 496 =

$= \left[\frac{10^{11}+1}{11}\cdot 4\right]^2 = 363\,636\,364^2$ este cel mai mic pătrat exact, scris în sistemul de numerație zecimal prin două numere identice alăturate.

(12) Dacă $\alpha \equiv \beta \pmod m$, atunci $\alpha^s \equiv \beta^s \pmod m$, deci și $a_s\alpha^s \equiv a_s\beta^s \pmod m$. În plus avem, evident, $a_0 \equiv a_0 \pmod m$.

Adunînd membru cu membru această din urmă congruență cu congruențele $a_s\alpha^s \equiv a_s\beta^s \pmod m$ (pentru $s=1, 2, \ldots, n$), obținem $a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n \equiv a_0+a_1\beta+a_2\beta^2+\cdots+a_n\beta^n \pmod m$ sau

$$f(\alpha) \equiv f(\beta) \pmod m.$$

(13) Deoarece $8^2 \equiv -1 \pmod 5$ rezultă că, raționînd la fel ca atunci cînd am dedus criteriul de divizibilitate prin 7 în sistemul zecimal, vom obține că numărul N, scris în sistemul cu baza 8, este divizibil prin 5 dacă suma algebrică a grupelor de cîte două cifre ale numărului N este divizibilă prin 5 (și reciproc !) Pentru obținerea celorlalte criterii de divizibilitate este suficient să ținem seama că $8^2 \equiv -1 \pmod{13}$; $5^2 \equiv -1 \pmod{13}$; $5^2 \equiv 1 \pmod 8$; $3 \equiv 1 \pmod 2$; $3 \equiv -1 \pmod 4$; $3^3 \equiv -1 \pmod 7$.

(14) Este suficient să găsim cel mai mic număr pozitiv de două cifre (sau de o singură cifră) cu care numărul considerat este congruent de modul 100.

De exemplu, $293^{293} \equiv (-7)^{293} \equiv -7\cdot 49^{146} \equiv -7\cdot 2401^{73} \equiv 93\cdot 1^{73} \equiv 93 \pmod{100}$.

Prin urmare, $293^{293} - 93$ este divizibil prin 100 (293^{293} va da restul 93 în împărțirea cu 100).

(15) Printre numerele $1, 2, 3, 4, \ldots, p^k-2, p^k-1, p^k$ multiplii lui p vor fi : $p, 2p, 3p, \ldots, p^{k-1}p = p^k$ (în total p^{k-1} numere). Celelalte $p^k - p^{k-1}$ numere vor fi prime cu p.

(16) Dacă $\varphi(n)$ ar da la împărțirea prin z_0 cîtul q și restul r $(0<r<z_0)$, adică dacă $\varphi(n) = qz_0+r$, atunci din $k^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ ar rezulta

$$k^{qz_0+r} \equiv (k^{z_0})^q \; k^r \equiv 1^q \cdot k^r \equiv 1 \pmod n,$$

ceea ce este imposibil, deoarece $r<z_0$.

(17) Să admitem că numerele m și n sînt scrise în sistemul de numerație cu baza k și că $m<n$. Dacă avem $k^{z_0} \equiv 1 \pmod n$ (z_0 este cel mai mic număr pozitiv care se bucură de această proprietate), atunci vom avea și $mk^{z_0} \equiv m \pmod n$. Aceasta înseamnă că dacă adăugăm în dreapta numărului n, z_0 zerouri, (ceea ce echivalează cu înmulțirea lui m cu k^{z_0}) și împărțim numărul obținut prin n, vom obține restul m, iar în cît grupa de cifre $c_1c_2\ldots c_{z_0}$. Dacă mai adăugăm o dată la rest z_0 zerouri, vom obține iarăși în cît aceeași grupă de cifre etc.

([18]) 1) Substituind în ecuația $ax+by=c$ expresia x_0+u pentru x și y_0+b pentru y, obținem $ax_0+au+by_0+bv=c$. Deoarece avem $ax_0+by_0=c$, rezultă că $au+bv$ trebuie să fie egal cu 0, de unde $au=-bv$; prin urmare, au trebuie să fie divizibil prin b. Dar a și b sînt prime între ele, deci u trebuie să fie divizibil prin b, adică $u=bt$ (t poate fi un întreg arbitrar) ; atunci $v=-at$. Așadar, ecuația va fi satisfăcută de x_0+bt și de y_0-at, pentru orice t întreg.

2) Oricare ar fi numerele întregi x și y, $ax+by$ este divizibil prin (a, b), și deci nu poate fi egal cu numărul c care, conform ipotezei, nu este divizibil prin (a, b).

([19]) Deoarece $\sqrt{2}=[1, 2, 2, 2, 2, \ldots]$ și $\sqrt{3}=[1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$, redusele pentru $\sqrt{2}$ vor fi

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \ldots,$$

iar pentru $\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780}, \frac{3691}{2131}, \ldots$$

Prin urmare, $\sqrt{2}\approx\frac{1393}{985}=1{,}4142131\ldots$ și $\sqrt{3}\approx\frac{1351}{780}=1{,}7320512\ldots$, unde avem $\left|\sqrt{2}-\frac{1393}{985}\right|<\frac{1}{985\cdot 2378}$ și $\left|\sqrt{3}-\frac{1351}{780}\right|<\frac{1}{780\cdot 2131}$.

([20]) Din primele trei ecuații cu patru necunoscute, putem exprima X, Y, Z prin U obținînd apoi $\frac{X}{1602}=\frac{Y}{891}=\frac{Z}{1580}=\frac{U}{2226}=s$, unde s este un număr arbitrar.

Din ultimele patru ecuații putem exprima x, y, z, u prin X, Y, Z, U. Dacă luăm apoi $s=4\,657\,t$, obținem valorile din text pentru X, Y, Z, U, x, y, z, u.

([21]) Dacă ABC este un „triunghi heronic" (vezi fig. 3), atunci lungimile segmentelor AD, BD, BC sînt raționale deoarece $BD=\frac{2\cdot S_{ABC}}{AC}$, $AD=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2\cdot AC}$ și $DC=|AC-AD|$.

([22]) Tripletele de numere pitagorice (3, 4, 5) și (5, 12, 13) generează tripletele de numere heronice (25, 39, 56), (25, 39, 16), (25, 52, 63), (25, 52, 33), (20, 13, 21), (20, 13, 11) (15, 13, 14), (15, 13, 8).

Tripletele de numere pitagorice (7, 24, 25) și (7, 24, 25) generează numai trei triplete heronice : (25, 25, 48), (25, 25, 14), (175, 600, 527) (al patrulea „triunghi heronic" format din două triunghiuri asemenea cu „triunghiurile pitagorice" date are laturile 7, 24 și 25).

([23]) b) $55\,555\,555 = 10\,001 \cdot 5555 = (7778 + 2223).(7778 - 2223)$;
c) $12\,345\,678\,987\,654\,321 = 111\,111\,111^2$;
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2 = 81 = 9^2$.

([23a]) $$-\log_4 \left\{ \log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{4}}}}}_{2n \text{ radicali}} \right\} =$$

$$= -\log_4 \left\{ \log_4 4^{\frac{1}{2^{2n}}} \right\} = -\log_4 \left(\frac{1}{4^n} \right) = n.$$

([24]) Dacă numărul x, $1 \leqslant x \leqslant 60$, apare în tabelele din fig. 4 în coloanele α, β, γ, atunci

$$x \equiv \alpha \pmod 3, \quad (1)$$
$$x \equiv \beta \pmod 4, \quad (2)$$
$$x \equiv \gamma \pmod 5, \quad (3)$$

Din (1) rezultă

$$x = 3y + \alpha, \quad (4)$$

Substituind această expresie în (2) obținem $3y + \alpha \equiv \beta \pmod 4$ sau $9y + 3\alpha \equiv 3\beta \pmod 4$, de unde $y \equiv 3\beta - 3\alpha \equiv \alpha - \beta \pmod 4$ sau

$$y = \alpha - \beta + 4z. \quad (5)$$

(Înmulțind ambii membri ai congruenței cu un număr prim cu modulul, obținem o congruență „echivalentă" cu cea inițială, adică ambele au aceleași rădăcini ; încercați să demonstrați.)

Introducînd (5) în (4), obținem

$$x = 3(\alpha - \beta) + 12z + \alpha = 4\alpha - 3\beta + 12z, \quad (6)$$

Din (6) și (3) avem $4\alpha - 3\beta + 12z \equiv \gamma \pmod 5$, sau $12\alpha - 9\beta + 36z \equiv 3\gamma \pmod 5$, de unde $z \equiv 3\gamma - 12\alpha + 9\beta \equiv 3\gamma + 3\alpha + 4\beta \pmod 5$

Prin urmare, $z = 3\gamma + 3\alpha + 4\beta + 5t$ ceea ce, după substituția în (6), ne dă

$$x = 4\alpha - 3\beta + 12(3\gamma + 3\alpha + 4\beta + 5t) = 40\alpha + 45\beta + 36\gamma + 60t, \quad (7)$$

sau $x \equiv 40\alpha + 45\beta + 36\gamma \pmod{60}$.

([25]) Să admitem că $n \equiv d_1 \pmod{11}$ implică $n^3 \equiv d_1^3 \equiv d \pmod{11}$, unde $0 \leqslant d_1 \leqslant 10$ și $0 \leqslant d \leqslant 10$, adică d_1 este restul împărțirii lui n prin 11, iar d restul împărțirii lui n^3 prin 11.

Se verifică ușor că pentru d_1 egal cu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valorile corespunzătoare ale lui d vor fi 0, 1, 8, 5, 9, 4, 7,

2, 6, 3, 10, adică fiecăreia dintre cele 11 valori ale lui d îi corespunde o valoare „proprie" a lui d_1, distinctă de celelalte.

Dacă vom scrie valorile lui d în ordinea naturală : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, atunci valorile corespunzătoare ale lui d_1 vor fi 0, 1, 7, 9, 5, 3, 8, 6, 2, 4, 10.

([26]) Pentru verificare, este suficient să ținem seama că : 1) Volumul apei conținute în toate oceanele este mai mic decît $1{,}4 \cdot 10^{21}$ litri sau $7 \cdot 10^{21}$ pahare. 2) Un pahar conține $\frac{200}{18}$ molecule-gram de apă prin urmare numărul de molecule „marcate" este aproximativ egal cu $\frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 200}{18}$, sau cu $\frac{2}{3} \cdot 10^{25}$.

([27]) Anul lumină este distanța L pe care lumina o „parcurge" într-un an,

$$L = 365,\ 25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 3 \cdot 10^{10}\text{cm} < 95 \cdot 10^{16}\text{cm} < 10^{18}\text{cm}.$$

Dacă v este volumul cubului de muchie $7.10^7 L$, iar N numărul de molecule de apă necesare pentru a umple un astfel de cub, atunci

$$v < (95 \cdot 10^{16} \cdot 7 \cdot 10^7)^3\ \text{cm}^3 = (0{,}665 \cdot 10^{26})^3\ \text{cm}^3 < \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 10^{78}\text{cm}^3$$

și

$$N < \frac{6 \cdot 10^{23}}{18} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 10^{78} = \frac{80}{81} \cdot 10^{100}.$$

([27a]) Fie $m = 4^{256}$; $\lg m = 256 \cdot \lg 4 > 256 \cdot 0{,}602055 = 154{,}12608$ și $m > 1{,}336 \cdot 10^{154}$. Prin urmare, $Q = 4^m > 4^{1{,}336 \cdot 10^{154}}$ și $\lg Q > 1{,}336 \cdot 10^{154} \cdot 0{,}602055 > 0{,}80434 \cdot 10^{154} > 8 \cdot 10^{153}$, adică $Q > 10^{8 \cdot 10^{153}}$.

([28]) Raza sferei este $R = \frac{10^{39}}{2} L < \frac{10^{39}}{2} \cdot 95 \cdot 10^{16}$cm. vezi nota ([27])

Volumul sferei este $v < \frac{4}{3}\pi \cdot 47{,}5^3 \cdot 10^{138}\ \text{cm}^3 < \frac{1}{2} \cdot 10^{144}\text{cm}^3$.

([29]) $\log_{1{,}000001}(e^{31 \cdot 10^6}) = 31 \cdot 10^6 \log_{1{,}000001} e \approx 31 \cdot 10^6 \cdot 10^6 =$
$= 3{,}1 \cdot 10^{13}$; $(e^{31 \cdot 10^6})^{10^{-6}} = e^{31} \approx 10^{0{,}43 \cdot 31} = 10^{13{,}33} \approx 2{,}2 \cdot 10^{13}$;
$\log_{1{,}000001}(e^{32 \cdot 10^6}) \approx 3{,}2 \cdot 10^{13}$; $(e^{32 \cdot 10^6})^{10^{-6}} = e^{32} \approx 5{,}86 \cdot 10^{13}$.

(30) Fie, de exemplu, $n=10\,000$. Din formula lui Stirling rezultă $\lg\sqrt{2\pi\cdot 10^4}-10\,000\lg e+40\,000<\lg(10\,000!)<\lg\sqrt{2\pi\cdot 10^4}-10\,000x$

$$x\lg e+40\,000+\frac{\lg e}{120\,000}.$$

Deoarece $\lg e\approx 0{,}4342945$, $\lg\pi\approx 0{,}49725$, $\lg 2\approx 0{,}30103$, iar $\frac{\lg e}{120\,000}$ este un număr foarte mic, avem $\lg(10\,000!)\approx$ $\approx\frac{1}{2}(0{,}49715+0{,}03\,103+4)-4342{,}945+40\,000=35\,659{,}454$, adică 10 000 ! este un număr cu 35 660 cifre.

(31) Dacă admitem că există două numere întregi k și k' astfel încît $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}<k<(a+1)\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ și $a\frac{3-\sqrt{5}}{2}<k'<(a+1)\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ atunci, adunînd membru cu membru aceste inegalități, obținem $a<k+k'<a+1$, ceea ce este imposibil (deoarece a și $a+1$ sînt întregi consecutivi).

Evident între numerele $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ și $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1$ este cuprins un număr întreg s. Dacă s este mai mic decît $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, atunci el se situează în primul interval ; dacă însă $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}<s<$ $<a\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1$, atunci scriind aceste inegalități sub forma

$$(a+1)\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)<s<a\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)+1,$$

obținem $(a+1)\frac{3-\sqrt{5}}{2}>a+1-s>a\frac{3-\sqrt{5}}{2}$,

adică în al doilea interval este cuprins numărul întreg $a+1-s$.

(32) Să întocmim tabela pozițiilor singulare $(c_k,\ d_k)$, folosind cele trei reguli de la începutul § 11.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25 ...
c_k	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30	32	33	35	37	38	40 ...
d_k	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47	49	52	54	57	60	62	65 ...

Mutările adecvate : $(27,\ 37)\to(16,\ 26)$; $(14,\ 90)\to(14,\ 23)$; $(47,\ 69)\to(47,\ 29)$.

(33) Se verifică ușor că pentru $a=40$, 55, 140, intervale $(a\cdot 0{,}618\ldots,\ (a+1)\cdot 0{,}618\ldots)$ conțin numerele întregi 25, 34, 87, iar pentru $a=400$, numărul întreg 153 este conținut în inter-

valul $(a \cdot 0{,}381\ldots,\ (a+1).0{,}381\ldots)$. Prin urmare, $40 = c_{25} (d_{25} = c_{25} + 25 = 65)$, $55 = c_{34}$ $(d_{34} = c_{34} + 34 = 89)$, $140 = c_{87} (d_{87} = c_{87} + 87 = 227)$, $400 = d_{153}$ $(c_{153} = 400 - 153 = 247)$.

(34) Mutările adecvate : (10, 17, 25)→(8, 17, 25) ; (47, 99, 181)→ →(47, 99, 76) ; (25, 43, 50) este poziția singulară și toate mutările duc la pierdere ; de la poziția (29, 29, 18) se poate trece la (15, 29, 18) sau la (29, 29, 0), iar de la (93, 29, 74) se poate trece la una din pozițiile (87, 29, 74), (93, 23, 74), (93, 29, 64).

(35) Să considerăm, ca exemplu, poziția în care inelele cu numerele 12, 9, 7, 6, 2 sînt lăsate în jos, iar celelalte sînt îmbrăcate peste broșă.

Pentru a-l coborî pe 11 trebuie în prealabil să lăsăm în jos inelele 8, 5, 4, 3, 1, după care va mai rămîne să facem $1 + u_9 + u_{10}$ mutări (să lăsăm în jos pe 11, să ridicăm inelele 1—9, să lăsăm în jos 1—10).

Dar pentru a-l coborî pe 8 trebuie să trecem prin stadiul intermediar în care 1—7 sînt ridicate, în care scop este necesar : să coborîm inelele 1, 3, 4 (7 mutări), să-l ridicăm pe 6 (o mutare), să-l lăsăm în jos pe 5 ($u_4 + u_5$ mutări), să-l ridicăm pe 7 (o mutare), să ridicăm 1—5 (u_5 mutări), în total $2u_5 + u_4 + 9$ mutări. Adăugînd u_8 mutări (pentru lăsarea în jos a inelelor 1—8) și cele $1 + u_9 + u_{10}$ mutări, menționate mai sus, obținem în total $u_{10} + u_9 + u_8 + 2u_5 + u_4 + 10$ mutări.

(36) Pentru a ne convinge că formula $u_n = 2^n - 1$ este adevărată, este suficient

1) Să arătăm că ea este valabilă pentru $n = 1$; 2) presupunînd că formula este adevărată pentru $n = k$ (k este un număr natural arbitrar), să demonstrăm că ea va fi valabilă și pentru $n = k + 1$.

Prima condiție rezultă din faptul că o placă poate fi trecută printr-o singură mutare de pe coloana A pe coloana B, adică $u_1 = 1 = 2^1 - 1$. Admițînd că $u_k = 2^k - 1$, și folosind formula $u_n = 2u_{n-1} + 1$, demonstrată în § 12, obținem $u_{k+1} = 2u_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$.

(37)

a) 55—57, 75—55, 54—56, 74—54, 53—55, 73—53, 43—63, 51—53, 63—43 33—53, 41—43, 53—33, 23—43, 31—33, 43—23, 13—33, 15—13, 25—23, 34—32, 13—33, 32—34, 45—25, 37—35, 57—37, 34—36, 37—35, 25—45, 56—54, 54—34, 46—44, 44—24.

b) 53—55, 73—53, 75—73, 65—63, 52—54, 73—53, 54—52, 51—53, 31—51, 32—52, 43—63, 51—53, 63—43, 45—65, 57—55, 65—45, 35—55 47—45, 55—35, 25—45, 37—35, 45—25, 15—35, 13—15, 23—25, 34—36, 15—35, 36—34, 33—53, 34—54, 54—52.

([38]) Dacă vom muta piesele în lungul liniei reprezentate în fig. 130, *a*, care reprezintă un „inel" închis, avînd un cîmp „gol", atunci poziția relativă a pieselor p e a c e s t i n e l, va rămîne neschimbată. Trebuie să dispunem piesele pe inel — dacă poziția inițială este rezolvabilă ! — în următoarea ordine (vezi fig. 15, III) :

1, 2, 3, 4, 8, 12, *, 15, 14, 13, 9, 10, 11, 7, 6, 5 (1)

(luînd de la celula de sus în sensul orar * este celula goală). Vom spune că aici nr. 2 urmează după nr. 1, nr. 3 după nr. 2, nr. 15 după nr. 12, nr. 1 după nr. 5 etc.

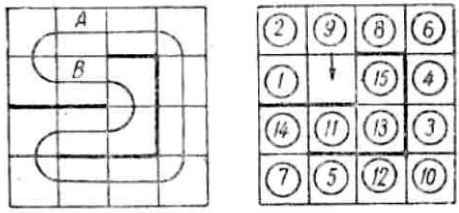


Fig. 130

Poziția relativă a pieselor pe inel variază numai atunci cînd *B* este o celulă goală și cînd în ea se mută o piesă din celula *A* (sau invers) ; piesa mutată se deplasează, în aceste condiții, „inelar" cu două locuri „spre stînga" (sau, „spre dreapta"). De exemplu, pentru a muta pe nr. 9 cu două locuri „spre stînga", în condițiile permutării inițiale.

5, 7, 14, 11, 13, 15, 1, 2, 9, 8, 6, 4, 3, 10, *, 12 (2)

trebuie să obținem printr-o deplasare circulară a pieselor poziția *b*) din fig. 130 și să-l mutăm pe nr. 9 în celula goală. Aceasta ne va da 2, *, 8, 6, 4, 3, 10, 12, 5, 7, 14, 11, 13, 15, 9, 1.

Deplasînd apoi în mod analog pe nr. 15 cu două locuri „spre stînga", vom face ca nr. 9 să-l urmeze pe nr. 13, ca în permutarea (1).

Apoi, în același fel putem face ca nr. 10 să urmeze pe nr. 9, nr. 11 pe nr. 10, nr. 7 pe nr. 11 etc. Dacă permutarea (2) este „rezolvabilă", vom ajunge în cele din urmă la permutarea (1), iar dacă (2) este „irezolvabilă", vom ajunge la permutarea 1, 2, 3, 4, 8, 12, *, 14, 15, 13, 9, 10, 11, 7, 6, 5, echivalentă cu IV din fig. 15.

([39]) Pentru $n=1$ și pentru $n=2$, formula (6) din § 15 ne dă

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}=1,\ v_2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right\}=\frac{2\{3\sqrt{5}+(\sqrt{5})^3\}}{8\sqrt{5}}=2.$$

După aceea

$$v_{s-1}+v_{s-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{s}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{s}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{s-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{s-1}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{s-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{s-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{s+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{s+1}\right\}=v_s$$

deoarece

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} \text{ şi } \frac{1-\sqrt{5}}{3}+1=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}.$$

([40]) Folosind pe rînd cele trei relaţii care leagă între ele mărimile w_s, w_{s-1}, w_{s-2} w_{s-3} şi ţinînd seama că $w_1=w_2=1$ şi $w_3=2$, obţinem uşor completînd succesiv celulele liniei de jos ale tabelei :

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14	**15** ...
w_s		1	1	2	4	7	13	17	30	60	107	197	257	454	908	1619 ...

cu caractere grase sînt tipărite numerele de ordine ale „celulelor cu teren alunecos"

([41]) Diversele moduri de trecere de la nodul $O(0, 0, \ldots, 0)$ la nodul $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, unde $a_1+a_2+\ldots+a_m=n$ pot fi caracterizate printr-o schemă din n litere, printre care litera x_1 (care arată că respectiva mutare măreşte cu o unitate prima coordonată a punctului) intervine de a_1 ori, litera x_2 de a_2 ori etc., în sfîrşit litera x_m apare de a_m ori. Dar a_1 locuri din n pentru a le completa cu litera x_1 pot fi alese în $C_n^{a_1}$ moduri : fiecăruia din aceste moduri îi corespund $C_{n-a_1}^{a_2}$ variante de aşezare a celor a_2 litere x_2 în cele $n-a_1$ locuri rămase libere. Prin urmare, cele a_1 locuri pentru x_1 şi cele a_2 locuri pentru x_2 (din totalul de n locuri) se pot alege în $C_n^{a_1}\cdot C_{n-a_1}^{a_2}$ moduri. Fiecăruia dintre ele îi corespund $C_{n-a_1-a_2}^{a_3}$ variante de aşezare a celor a_3 litere x_3 în cele $n-a_1-a_2$ locuri rămase libere, adică avem în total $C_n^{a_1}\cdot C_{n-a_1}^{a_2}\cdot C_{n-a_1-a_2}^{a_3}$ moduri pentru a alege locurile completate cu literele x_1, x_2 şi x_3.

Continuînd raționamentul, obținem că pentru a așeza cele a_1 litere x_1, cele a_2 litere x_2, ..., cele a_{m-1} litere x_{m-1} (în aceste condiții, literele x_m vor ocupa automat cele a_m locuri rămase libere) avem $C_n^{a_1} \cdot C_{n-a_1}^{a_2} \cdot C_{n-a_1-a_2}^{a_3} \cdots C_{n-a_1-a_2-\ldots-a_{m-2}}^{a_{m-1}} = \frac{n!}{a_1!(n-a_1)!} \times$

$$\times \frac{(n-a_1)!}{a_2!(n-a_1-a_2)!} \cdots \frac{(n-a_1-a_2-\ldots-a_{m-1})!}{a_{m-1}!\,a_m!} =$$

$$= \frac{n!}{a_1!\,a_2! \ldots a_m!} \text{ moduri.}$$

([42]) În fig. 131 se arată în cîte moduri poate calul să ajungă prin numărul minim de „mutări scurte" pînă la un anumit cîmp al tablei de șah „cu bariere".

Pentru comoditate, datele referitoare la cîmpurile celei de-a patra zone (2, 2, 4, 2, 2), ale celei de-a opta zone (10, 2, 2, 2, 4, 8, 2, 2, 2, 10) și ale celui de-a 12-a zone (8, 8, 8, 8) sînt înconjurate cu cerculețe.

12	(2)	4	8	8	(8)	8	16
(10)	2	(2)	4	(8)	16	48	8
8	2	4	(2)	8	48	16	(8)
6	2	2	2	(4)	8	(8)	8
4	(2)	2	(8)	2	(2)	4	8
(2)	2	(4)	2	2	4	(2)	4
1	2	2	(2)	2	2	2	(2)
A	1	(2)	4	6	8	(10)	12

Fig. 131

1	4	10	16	19	16	10	4	1
4	1	3	6	7	6	3	1	4
10	3	1	2	3	2	1	3	10
16	6	2	1	1	1	2	6	16
19	7	3	1		1	3	7	19
16	6	2	1	1	1	2	6	16
10	3	1	2	3	2	1	3	10
4	1	3	6	7	6	3	1	4
1	4	10	16	19	16	10	4	1

Fig. 132

([43]) Din fig. 132 se vede că zona a patra este formată din 32 celule. Regele poate nimeri în zona a patra în 320 de moduri (suma cifrelor din celulele celei de a patra zone).

([44]) Doi pioni pot fi deplasați din linia a doua într-a opta,

a) în 12 mutări, fără a uza de dreptul mutării duble, în $\frac{12!}{6!6!}$ moduri ;

b) în 11 mutări, folosind dreptul mutării duble numai pentru primul pion (sau numai pentru al doilea), în $\frac{11!}{5!6!}$ moduri ;

c) în 10 mutări, folosind pentru ambii pioni dreptul dublei mutări, în $\frac{10!}{5!\,5!}$ moduri. În total avem pentru cei doi pioni $\frac{12!}{6!6!}+$ $+2\frac{11!}{5!6!}+\frac{10!}{5!5!}$ moduri.

Analog, pentru trei și pentru patru pioni vom avea respectiv

$$\frac{18!}{6!6!6!}+3\frac{17!}{5!6!6!}+3\frac{16!}{5!5!6!}+\frac{15!}{5!5!5!}\text{ moduri și}$$

$$\frac{24!}{6!6!6!6!}+4\frac{23!}{5!6!6!6!}+6\frac{22!}{5!5!6!6!}+4\frac{21!}{5!5!5!6!}+\frac{20!}{5!5!5!5!}$$

moduri.

(45) *a*) Un triunghi nu se poate construi, deoarece el prezintă (vezi fig. 29, *e*) șase direcții iar pe fiecare dintre acestea suma celor trei termeni trebuie să fie aceeași. Însă numărul 12 poate fi scris numai în cinci moduri ca sumă a trei numere naturale distincte nu mai mari decît 7 : $12=1+4+7=1+5+6=2+3+7=2+4+6=$ $=3+4+5$ (pentru numerele 11 și 13 avem numai cîte patru moduri de a le scrie sub formă de sumă cu trei termeni, pentru numerele 10 și 14 avem patru moduri, pentru 9 și 15 cîte trei moduri etc.).

b) Un pentagon nu se poate construi, deoarece numărul care figurează în centrul său trebuie să intervină în cinci sume egale avînd fiecare cîte trei termeni distincți, nu mai mare decît 11 ; ne convingem însă ușor prin verificare directă, că un astfel de număr nu poate fi găsit.

(46) 1) În jocul de domino generalizat avem $n+1$ pietre de forma (k, k) și $C_{n+1}^2=\frac{(n+1)n}{2}$ pietre de forma (l, m), unde $l\neq m$, deci în total avem $n+1+\frac{(n+1)n}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ pietre.

2) Fiecare număr k intervine de n ori în combinație cu numerele m, diferite de k, și de două ori pe piatra (k, k). Prin urmare, suma tuturor punctelor va fi $(0+1+2+\ldots+n)(n+2)=$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

(47) Dacă eliminăm piatra (a, b), $(a\neq b)$, dintr-un joc de domino complet, în care n este par, atunci pe pietrele rămase vor figura, a puncte (precum și b puncte), de un număr impar $n+1$ de ori, (vezi (46), 2).

Pe de altă parte, este evident ca în orice lanț închis, fiecare număr de puncte intră de un număr par de ori ; un anumit număr de puncte poate figura de un număr impar de ori numai într-un lanț deschis, și atunci acest număr va figura la unul dintre capetele lanțului.

(48) Pentru n impar, în dominoul generalizat, fiecare număr de puncte intervine de un număr impar de $(n+2)$ ori. Într-un lanț deschis intervin de un număr impar de ori numai acele numere de puncte care figurează la capetele lanțului. Prin urmare, cel puțin $n-1$ dintre numerele 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$, n vor figura pe pietre care nu fac parte din lanț, adică cel puțin $\frac{n-1}{2}$ pietre de domino nu vor putea fi așezate în lanț. Numărul total al pietrelor este însă $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Prin urmare, putem așeza în lanț cel mult

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n-1}{2} = \frac{n^2+2n+3}{2} \text{ pietre.}$$

(49) Una dintre repartițiile posibile ale pietrelor este : la primul jucător — (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,4), (1,5), (1,6) ; la al patrulea jucător — (1,1), (1,2), (1,3), (0,4), (0,5), (0,6), (2,2).

Jucătorii I și IV formează lanțul
(0,0), (0,4), (4,1), (1,2), (2,0), (0,5), (5,1), (1,1), (1,0), (0,6) (6,1), (1,3), (3,0)
(jucătorii II și III nu pot intra în joc, deoarece nu au pietre care conțin 0 puncte sau 1 punct).

(50) Să numerotăm cîmpurile tablei cu 4×5 cîmpuri (fig. 39, *b*), așa cum se arată în fig. 133. Iată șirul de mutări care duce la rezultat :

1.19—14 2— 7
2.18—15 3— 6
3.14— 8 7—13
4.15—12 6— 9
5.20— 5 1—16
6. 5— 2 16—19
7. 8—11 13—10
8.12—18 9— 3
9.11— 1 10—20
10.17—11 4—10
11.2 —12 19— 9
12.11—16 10— 5
13.12— 7 9—14
14.18—13 3— 8
15.16— 6 5—15
16.7 — 2 14—19
17.13— 4 8—17
18.6 — 3 15—18

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

Fig. 133

([51]) În fig. 119, *a* este reprezentată o schemă plană a cărei parcurgere după regulile jocului lui Hamilton (vezi § 34) este echivalentă cu parcurgerea unei table cu 3×4 cîmpuri, prin mutarea calului de șah. Ne convingem ușor că începînd drumul din punctele L, M, R, B, C, Q (fig. 119, *a*), nu putem trece prin toate punctele schemei dacă ne mișcăm pe segmentele ei și avem dreptul să intrăm doar cîte o singură dată în fiecare punct.
Drumurile posibile sînt :

NBPMAQCSLDRK, *PMAQNBRKCSLD,*
NBPMAQCSLDRK, *PMAQNBRDLSCK,*
NQAMPBRKCSLD, *AMPBNQCKRDLS,*
NQAMPBRDLSCK, *AMPBNQCSLDRK,*

caracterizate fiecare printr-o linie frîntă deschisă care poate fi parcursă, desigur, și în sens contrar (ceea ce nu vom considera drept un drum nou).

([51a]) Dacă vom scrie pe rînd primele 40 de numere naturale și vom elimina, mergînd de la stînga spre dreapta, fiecare al treilea număr (subliniindu-l și indicînd între paranteze al cîtelea număr eliminat este), vom obține :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(37)	(14)	(1)	(25)	(29)	(2)	(15)	(33)	(3)	(24)	(16)	(4)
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
(39)	(30)	(5)	(17)	(25)	(6)	(36)	(18)	(7)	(34)	(26)	(8)
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
(19)	(31)	(9)	(40)	(20)	(10)	(27)	(38)	(11)	(21)	(32)	
		36	37	38	39	40					
		(12)	(28)	(22)	(13)	(35)					

de unde vedem că penultimul element eliminat va fi numărul 13, și ultimul — numărul 28.

În cazul nostru $n=40$, $k=3$, $q=\frac{k}{k-1}=3/2$, $nk=120$. Pentru $s=39$, $a_1=k(n-s)+1=4$ și „progresia geometrică în numere întregi" va fi 4, 6, 9, 14, 21, 32, 48, 72, 108, 162, ...

Deoarece $162>nk=120$, avem $A=108$ și $t=nk+1-A=$ $=120+1-108=13$, adică elementul nr. 13 va fi eliminat al 39-lea.

Dacă $s=40$, avem $a_1=1$ și „progresia geometrică în numere întregi" va fi 1, 2, 3, 5, 8, 12, 18, 27, 41, 62, 93, 140 , ...

Deoarece $140>nk=120$, avem $A=93$ și $t=120+1-93=28$, adică al 40-lea element eliminat va fi nr. 28.

(51A)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(28)	(19)	(22)	(36)	(16)	(1)	(7)	(12)	(35)	(31)	(25)	(2)
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
(20)	(8)	(27)	(13)	(17)	(3)	(23)	(30)	(9)	(32)	(29)	(4)
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
(14)	(21)	(18)	(10)	(34)	(5)	(26)	(24)	(15)	(33)	(11)	(6)

Din tabelă se vede că trebuie să dispunem cărţile — socotind de sus în jos — în următoarea ordine : asul de pică (cartea nr. 28 sau, altfel spus, cartea întîi din culoarea a patra), asul de treflă (cartea nr. 19, sau prima carte din culoarea a treia), valetul de treflă (cartea nr. 22, sau a patra din culoarea a treia) etc.

Dat fiind că $n=36$, $k=6$, $q=\frac{k}{k-1}=\frac{6}{5}$, $nk=216$, căpătăm următoarele „progresii geometrice în numere întregi" : pentru $s=19$: $a_1=6\cdot 17+1=103$, 124, 149, 179, 215, 258, ... pentru $s=31$: $a_1=6\cdot 5+1=31$, 38, 46, 56, 68, 82, 99, 119, 143, 172, 207, 249, ... pentru $s=17$: $a_1=6\cdot 19+1=115$, 138, 166, 200, 240, ...

Dat fiind că în aceste „progresii" numerele cele mai mari care nu depăşesc numărul nk sînt 215, 207, 200, valorile corespunzătoare ale lui t vor fi 2 (216 — 215+1), 10 (216 — 207+1) şi 17 (216 — — 200+1), vezi în tabelă numerele tipărite cu cifre grase.

([52]) Dacă elementele $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sînt aşezate în cerc în sensul mersului acelor de ceasornic, şi apoi fiecare dintre ele este transportat — în sens contrar mersului acelor de ceasornic — în locul elementului vecin, aceasta va fi echivalent cu substituţia ciclică $C=(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Evident, $C^k=E$, deoarece după repetarea de k ori a operaţiei descrise, toate elementele vor reajunge în vechiul lor loc.

Dacă substituţia A este egală cu produsul mai multor cicluri independente, $A=C_1.C_2 \ldots C_s$, de ordin $k_1, k_2, \ldots, k_s$, atunci în substituţia A^m toate elementele vor ajunge în vechile lor locuri numai în cazul cînd m este divizibil prin k_1, prin k_2, prin k_3 etc. Cea mai mică valoare a lui m care satisface aceste condiţii este egală cu cel mai mic multiplu comun al numerelor $k_1, k_2, \ldots, k_s$.

([53]) Să admitem că, în conformitate cu regula indicată în textul § 22 pentru trecerea de la o permutare la a doua, de la aceasta la a treia etc., în fiecare trecere elementele care ocupă, să zicem, locurile cu numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ îşi cedează locul în ordine ciclică, atunci substituţia M va conţine ciclul $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_s)$, unde $a'_1, a'_2, \ldots, a'_s$ sînt elementele care se aflau iniţial în locurile cu numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$.

La fel se pun în evidenţă şi celelalte cicluri care fac parte din componenţa substituţiei căutate M.

([54]) Să notăm cu α_k unghiurile cele mai apropiate de centru ale romburilor din rîndul al k-lea. Dacă punctul A este comun pentru romburi din rîndurile al $(k-1)$-lea și al $(k+1)$-lea, atunci $\alpha_{k-1}+2(\pi-\alpha_k)+\alpha_{k+1}=2\pi$ (vezi fig. 134, *a*), de unde $\alpha_{k+1}-\alpha_k=\alpha_k-\alpha_{k-1}$, adică $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ formează o progresie aritmetică; rația progresiei este $\alpha_1=\frac{2\pi}{m}$ deoarece $\alpha_2=2\alpha_1$ (fig. 134, *b*), de unde $\alpha_2-\alpha_1=\alpha_1=\frac{\pi}{m}$; prin urmare, $\alpha_k=k\frac{2\pi}{m}$.

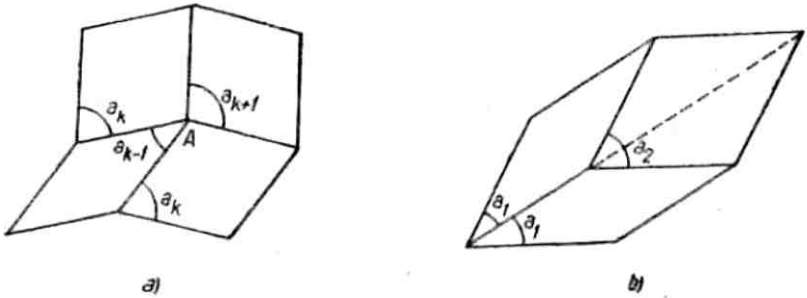


Fig. 134

Dacă m este impar, atunci $\alpha_{\frac{m-1}{2}}=\frac{m-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{m}=\frac{\pi(2m-2)}{2m}$, adică $\alpha_{\frac{m-1}{2}}$ este egal cu unghiul poligonului regulat cu $2m$ laturi.

Celelalte unghiuri ale poligonului cu $2m$ laturi sînt formate din trei unghiuri a căror sumă este

$$\alpha_{\frac{m-1}{2}-1}+2\left(\pi-\alpha_{\frac{m-1}{2}}\right)=\frac{2\pi}{m}\cdot\frac{m-3}{2}+2\left(\pi-\frac{m-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{m}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{m}(m-3+2)=\frac{\pi(m-1)}{m}=\alpha_{\frac{m-1}{2}}.$$

Pentru m par, $\alpha_{\frac{m}{2}-1}=\frac{2\pi}{m}\left(\frac{m}{2}-1\right)=\frac{\pi(m-2)}{m}$, adică $\alpha_{\frac{m}{2}-1}$ este egal cu unghiul poligonului regulat cu m laturi; în același timp, „unghiul compus" (în genul unghiului D din fig. 54, *b*) va fi

$$\alpha_{\frac{m}{2}-2}+2\left(\pi-\alpha_{\frac{m}{2}-1}\right)=$$

$$=2\pi+\left[\frac{m}{2}-2-2\left(\frac{m}{2}-1\right)\right]\cdot\frac{2\pi}{m}=\pi.$$

([55]) Dacă vom nota cu α_k unghiul cel mai apropiat de centrul poligonului regulat al rombului din rîndul k se demonstrează uşor că $\alpha_k=(2k+1)\frac{\pi}{m}$ (este suficient să stabilim că $\alpha_1=\frac{3\pi}{m}$ şi $\alpha_2=\frac{5\pi}{m}$ şi să folosim egalitatea evidentă $\alpha_{k+1}+\alpha_{k-1}+2(\pi-\alpha_k)=2\pi$, de unde rezultă că α_1, α_2, α_3 etc. formează o progresie aritmetică). Dar atunci $\alpha_{\frac{m-3}{2}}=\left(2\frac{m-3}{2}+1\right)\frac{\pi}{m}=\frac{\pi(m-2)}{m}$, ceea ce reprezintă unghiul poligonului regulat cu m laturi. În afară de aceasta, „unghiul compus" (în genul unghiului cu vîrful în E din fig. 55, *b*) este $\alpha_{\frac{m-5}{2}}+2\left(\pi-\alpha_{\frac{m-3}{2}}\right)=(m-4)\frac{\pi}{m}+2\left[\pi-\frac{\pi(m-2)}{m}\right]=\pi$.

Se verifică uşor că fiecare dintre unghiurile „poligonului deschis" (în genul poligonului *ABCDEFGHIKL* din fig. 55, *b*) este egal cu $\frac{\pi(m-2)}{m}$, de unde rezultă că „poligonul deschis" este regulat (de exemplu dacă α este unghi la vîrf într-un poligon stelat, atunci

$$\sphericalangle ABC=\alpha+(\pi-\alpha_1)=\alpha+\pi-3\alpha=\pi-2\alpha,\ \sphericalangle BCD=\alpha_1+$$

$$+(\pi-\alpha_2)=3\alpha+\pi-5\alpha=\pi-2\alpha \text{ etc., iar } \pi-2\alpha=$$

$$=\pi-\frac{2\pi}{m}=\frac{\pi(m-2)}{m}$$

este unghiul poligonului regulat cu m laturi).

([56]) Dacă laturile pătratelor componente sînt de 2 cm, 5 cm, 7 cm etc., atunci ariile drepunghiurilor S_1, S_2, S_3 constituie respectiv din nouă, zece şi treisprezece pătrate vor fi

$$4209\ \text{cm}^2=(2^2+5^2+7^2+9^2+16^2+25^2+28^2+33^2+36^2)\ \text{cm}^2,$$

$$10270\ \text{cm}^2=(3^2+11^2+12^2+23^2+34^2+35^2+38^2+41^2+44^2+45^2)\ \text{cm}^2$$

$$27495\ \text{cm}^2=(1^2+4^2+5^2+9^2+14^2+19^2+33^2+52^2+56^2+69^2+$$
$$+70^2+71^2+72^2)\ \text{cm}^2.$$

Deoarece $4209=3.23.61$, laturile dreptunghiului S_1 pot fi egale fie cu 3 *cm* şi 1 403 *cm*, fie cu 69 *cm* şi 61 *cm*, fie cu 23 *cm* şi 183 *cm*. Cazul întîi şi al treilea nu sînt potrivite, deoarece nici o latură a lui S_1 nu are voie să fie mai mică decît latura celui mai mare dintre pătratele componentelor (36 *cm*). De aceea laturile dreptunghiului S_1 sînt 69 *cm* şi 61 *cm*.

Analog, $10270=2.5.13.79=79.130=65.158$. Însă 65 *cm* nu poate fi reprezentat ca sumă a lungimilor laturilor patratelor care ne-au fost date. De aceea, laturile lui S_2 sînt de 79 şi 130 *cm*. Laturile dreptunghiului S_3 sînt de 141 *cm* şi 195 *cm*, deoarece $27495=$

$= 3.3.5.13.47 = 141.195$ (alte descompuneri ale numărului 27 495 în doi factori nu concordă cu dimensiunile pătratelor componente).

Dacă în loc de „pătrat de latură a" vom scrie „pătrat a", atunci S_1 este constituit (socotind de la stînga spre dreapta) din pătratele 36, 33 (rîndul de sus) ; 5, 28 (sub 33) ; 25, 9, 2 (sub 36) ; 7 (sub 2 și 5), 16 (sub 9 și 7) ; S_2 este format din pătratele 41, 44, 45 (rîndul de sus) ; 38, 3 (sub 41) ; 35, 12 (sub 3 și 44) ; 11, 34 (45) ; 23 (sub 12 și 11) ; S_3 este compus din pătratele 71, 72, 52 (rîndul de sus) ; 19, 33 (sub 52) ; 5, 14 (sub 19) ; 70, 1 (sub 71) ; 69, 4 (sub 1 și 72) ; 9 (sub 4 și 5) ; 56 (sub 9, 14, 33): e

([57]) „Dreptunghiul 608×377" este constituit din pătratele 209, 205, 194 (rîndul de sus) ; 11, 183 (sub 194) ; 44, 172 (sub 205 și 11) ; 168, 41 (sub 209) ; 1, 43 (sub 44) ; 42 (sub 41 și 1) ; 85 (sub 42 și 43). „Dreptunghiul 608×231" este format din pătratele 231, 95, 61, 108, 113 (rîndul de sus) ; 34, 27 (sub 61) ; 7, 20 (sub 27) ; 136 (sub 95, 34 și 7) ; 123, 5 (sub 128) ; 118 (sub 5 și 113).

([58]) Dacă pătratul cel mai mic $ABCD$ ar adera cu latura AB la una dintre laturile dreptunghiului, el ar fi ori prins între două pătrate mai mari, ori „înghesuit" de pătratele mai mari spre latura vecină a dreptunghiului ; în ambele cazuri, la latura CD a pătratului celui mai mic nu ar putea să adere un pătrat de dimensiune mai mare.

([59]) 1) $a^3 = \left(\frac{2a}{3}\right)^3 + 17\left(\frac{a}{3}\right)^3 + 16\left(\frac{a}{6}\right)^3$, adică cubul de muchie a poate fi descompus în 34 de cuburi ; un cub cu muchia $2a/3$, 17 cuburi de muchie $a/3$ și 16 cuburi de muchie $a/6$.

2) $a^3 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^3 + 48\left(\frac{a}{4}\right)^3$ adică cubul de muchie a poate fi descompus în 50 de cuburi ; două cuburi de muchie $a/2$ și 48 cuburi de muchie $a/4$.

([60]) Pătratul de latură a poate fi descompus în patru pătrate, în șase pătrate (unul de latură $2a/3$, cinci de latură $a/3$), în opt pătrate (unul de latură $3a/4$ și șapte de latură $a/4$).

Dar dacă un pătrat poate fi descompus în s părți, atunci dacă împărțim vreunul dintre pătratele mai mici astfel obținute în patru părți, vom reuși să descompunem pătratul și în $s+3$ părți. Prin urmare, un pătrat poate fi împărțit în șapte $(4+3)$, în zece (șapte+ + trei) etc., în general, în $4+3k$ pătrate. Raționînd în același mod ne convingem că pătratul mare poate fi descompus în $6+3l$ pătrate și în $8+3m$ pătrate (k, l, m sînt numere naturale).

Dar un număr natural arbitrar n, începînd cu 6, poate fi reprezentat fie sub forma $6+3l$, fie sub forma $4+3k$, fie sub forma

$8+3m$, deoarece aceste numere, împărțite prin 3 dau un rest fie 0, fie 1, fie 2.

([61]) Toate vîrfurile unui decagon regulat oarecare, trebuie să fie noduri de tipul (10, 5, 5), vezi fig. 135. Dar atunci punctele B și D nu pot fi noduri de același tip, deoarece atunci în punctul C „ar converge" două decagoane regulate și un pentagon regulat, ceea ce este imposibil.

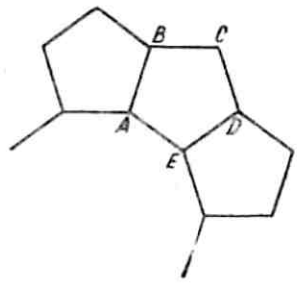


Fig. 135

([62]) Fiecare unghi al poligonului regulat cu m laturi are mărimea $\frac{180^\circ(m-2)}{m}$. Suma unghiurilor avînd vîrful în nodul $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ este de 360°, deci $\frac{180^\circ(n_1-2)}{n_1}+\frac{180^\circ(n_2-2)}{n_2}+\ldots+\frac{180^\circ(n_k-2)}{n_k}=360^\circ$. Simplificînd cu 180°, obținem $k-2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_k}\right)=2$.

([63]) Din fig. 136, *a* se vede că din cinci pentagoane de forma lui $ABCDE$ ($AB=BC=CD=DE$; $\sphericalangle B=\sphericalangle D=90^\circ$; $\sphericalangle A=\sphericalangle C=\sphericalangle E=120^\circ$) putem forma hexagonul $KCLMNP$, avînd laturile opuse egale și paralele, iar cu un astfel de hexagon este ușor să umplem planul. În fig. 136, *b* se arată cum poate fi completat planul cu pentagoane regulate și romburi avînd unghiul ascuțit de 36°.

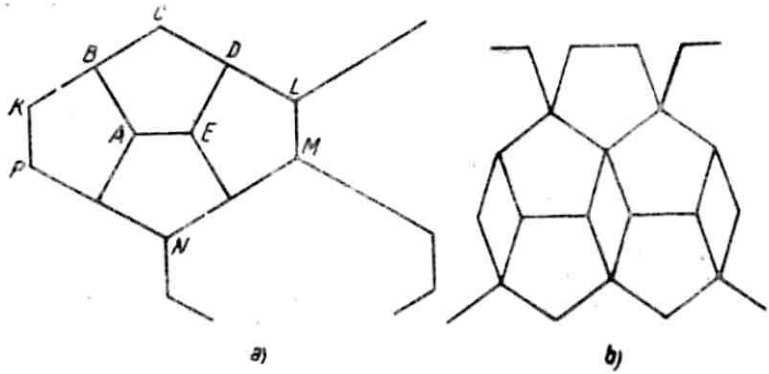


Fig. 136

([64]) Este suficient să demonstrăm că indiferent dacă vom lua simetricul triunghiului ABC, întîi față de latura BC, apoi față de latura AB, un punct arbitrar M aparținînd triunghiului ABC, va duce, pînă la urmă, la același ansamblu de 5 puncte: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 (fig. 137).

([65a]) Vezi fig. 138.

([65b]) Este suficient să ducem drepte paralele cu laturile dreptunghiului și care împart latura a, în $n+1$, iar latura b în n părți și să ducem o linie frîntă în conformitate cu fig. 139 (în figură $n=6$).

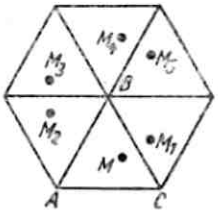


Fig. 137

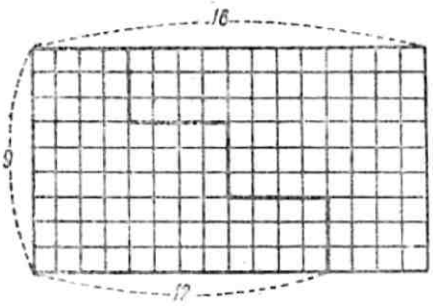


Fig. 138

([66]) În figura 140 este reprezentat un paralelipiped „$\frac{am}{m+1} \times \frac{b(m+1)}{m} \times c$", format din două jumătăți V_1 și V_2 ale paralelipipedului „$a \times b \times c$" (în figură $m=4$ și $PQ = \frac{b(m+1)}{m}$). Ducînd prin linia frîntă $ABCDEF$ o secțiune paralelă cu muchia PQ, tăiem fie-

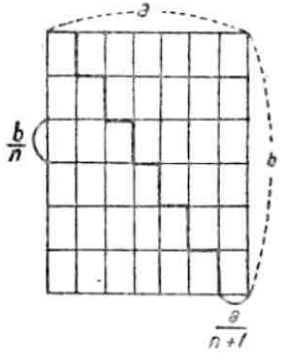


Fig. 139

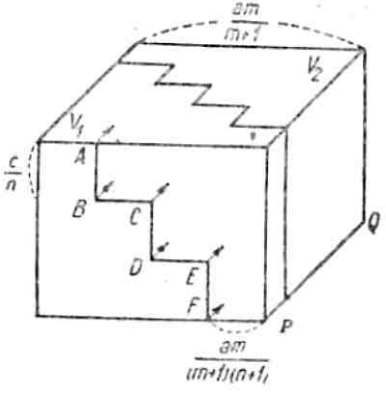


Fig. 140

care dintre jumătățile V_1 și V_2 în două părți ; deplasăm părțile din dreapta în sus cu c/n și apoi spre stînga cu $\frac{am}{(m+1)(n+1)}$, căpătăm paralelipipedul $\frac{amn}{(m+1)(n+1)} \times \frac{b(m+1)}{m} \times \frac{c(n+1)}{a}$ (în figură,

$n=3$). Analog, se efectuează reconstituirea paralelipipedului $a\times b\times c$ în paralelipipedul $\frac{am}{m+1}\times\frac{b(m+1)n}{m(n+1)}\times\frac{c(n+1)}{n}$.

([67]) Vezi fig. 141.

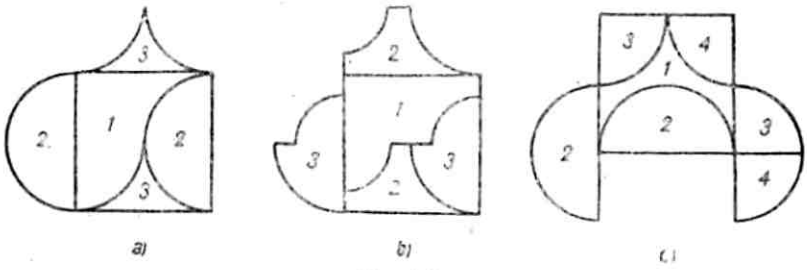
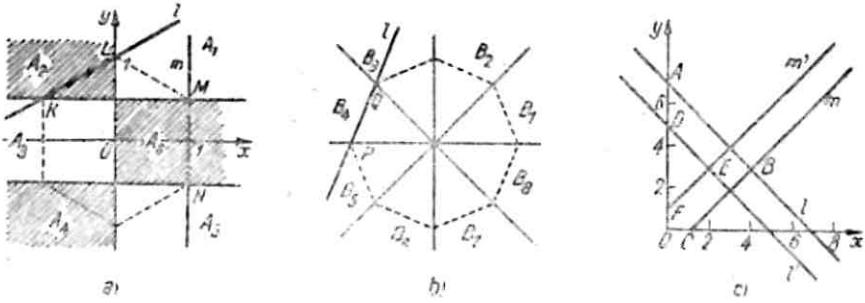


Fig. 141

([68]) Pentru ca curba $\begin{cases} x=a\sin mt \\ y=b\sin nt \end{cases}$ să treacă printr-unul din vîrfurile dreptunghiului „circumscris" acestei curbe, trebuie să avem pentru o anumită valoare a parametrului t, relațiile $mt=(2k+1).90°$ și $nt=(2l+1).90°$, unde k și l sînt numere întregi, ceea ce este posibil numai cu condiția să găsim numere întregi k și l pentru care să avem $\frac{m}{n}=\frac{2k+1}{2l+1}$

În acest caz, pentru $t=\frac{(2k+1)\cdot 90°}{m}=\frac{(2l+1)\cdot 90°}{n}=t_0$, vom avea $|x_0|=|y_0|=1$. Lăsăm în seama cititorului de a verifica că punctele (x_1, y_1) și (x_2, y_2), corespunzătoare parametrului $t_1=t_0-\Delta t$ și $t_2=t_0+\Delta t$ (Δt este arbitrar) va coincide.



Fig, 142

([69]) I) Ecuația $|2y-1|+|2y+1|+\frac{4|x|}{\sqrt{3}}=4$, dacă nu folosim simbolul modulului, va fi scrisă în alt fel în fiecare dintre regiunile A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (fig. 142, *a*). De exemplu, pentru $y\geqslant\frac{1}{2}$

și $x \leqslant 0$ (regiunea A_2), avem $2y-1+2y+1+\frac{4(-x)}{\sqrt{3}}=4$ sau $y-\frac{x}{\sqrt{3}}=1$; acestei ecuații îi corespunde dreapta l, din care trebuie să luăm segmentul KL situat în regiunea A_2. Pentru $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$ și $x \geqslant 0$, avem $1-2y+2y+1+\frac{4x}{\sqrt{3}}=4$ sau $x=\sqrt{3/2}$ ceea ce reprezintă ecuația dreptei m din care trebuie să luăm numai segmentul MN, situat în regiunea A_6 etc.

II) Ecuația $|x|+|y|+\frac{1}{\sqrt{2}}(|x-y|+|x+y|)=\sqrt{2}+1$, dacă nu utilizăm simbolul modulului, se scrie în mod diferit în fiecare dintre cele opt „sectoare" B_k $(1 \leqslant k \leqslant 8)$, în care planul este împărțit de axele de coordonate și de bisectoarele unghiurilor de coordonate (vezi fig. 142, *b*). De exemplu, în sectorul B_4 unde $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x-y \leqslant 0$, $x+y \leqslant 0$, avem $-x+y+\frac{1}{\sqrt{2}}\{y-x+(-x-y)\}=1+$ $+\sqrt{2}$ sau $y-(1+\sqrt{2})x=1+\sqrt{2}$, adică ecuația dreptei l care trece prin punctul $(-1,0)$ sub un unghi de 67 30′ față de axa Ox ($\operatorname{tg} 67\,30' = 1+\sqrt{2}$). Segmentul de pe dreapta $-PQ$, situat în sectorul B_4, dă latura PQ a octogonului regulat. Îi recomandăm cititorului să se convingă că laturile octogonului regulat din celelalte sectoare se obțin în același mod.

III) Deoarece în ecuația $||x|+||y|-3|-3|=1$, x și y intervin numai sub semnul de modul, este suficient ca, după ce am construit porțiunea „curbei" din primul cadran, să construim apoi „curbele simetrice cu ea în raport cu axa Ox, cu axa Oy și cu originea coordonatelor.

Pentru $x \geqslant O$ și $y \geqslant O$, avem $|x+|y-3|-3|=1$, de unde rezultă fie că $x+|y-3|-3=1$, adică

$$|y-3|=4-x, \tag{1}$$

fie că $x+|y-3|-3=-1$, adică

$$|y-3|=2-x. \tag{2}$$

Ecuația (1) are sens numai pentru $x \leqslant 4$, în care caz rezultă din ea fie $y-3=4-x$ (dreapta l din care trebuie să luăm segmentul AB, unde $x \leqslant 4$), fie $y-3=x-4$ (dreapta m din care trebuie să luăm segmentul BC pentru $x \leqslant 4$) vezi fig. 142, *c*).

Ecuația (2) ne dă $y-3=2-x$ (dreapta l', din care trebuie să luăm segmentul DE unde $x\leqslant 2$), sau $y-3=x-2$ (dreapta m' din care trebuie să luăm segmentul DE, unde $x\leqslant 2$).

([70]) Să admitem că $y=f(x)$ este ecuația curbei l, iar curba l' este deplasată spre dreapta lui l cu segmentul α (fig. 143). Dacă $A'(x, y)$ este un punct arbitrar al curbei l', iar $A(X, Y)$ este punctul corespunzător de pe curba l, adică $X=x-\alpha$ și $Y=y$, atunci $Y=f(X)$ și deci

$$y=f(x-\alpha),$$

care este tocmai ecuația curbei l', satisfăcută de coordonatele oricăruia dintre punctele ei.

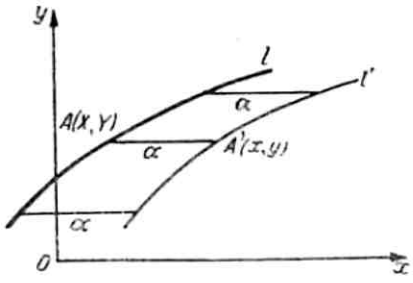


Fig. 143

([70a]). Trebuie să folosim tabele de logaritmi cu șapte zecimale.

([71]) 1) Cele șase plane care trec prin muchiile tetraedrului regulat și sînt egal înclinate pe fețele tetraedrului formează la intersecțiile lor un cub (vezi fig. 100, *b*).

2) Cele 12 diagonale lungi ale dodecaedrului rombic ($0_1 0_2$ etc., vezi fig. 105) sînt muchiile unui octaedru regulat. Planele care trec prin muchiile acestui octaedru și sînt egal înclinate pe fețele lui vor mărgini un dodecaedru rombic care este reprezentat în fig. 105.

([72]) Să presupunem că două culori sînt suficiente pentru colorarea regiunilor în care planul este descompus de n drepte. Dacă vom duce $a(n+1)$ — a dreaptă, vom păstra de o parte a ei culoarea tuturor regiunilor (și a bucăților de regiuni) din „descompunerea n", iar de cealaltă parte vom inversa culoarea fiecărei regiuni, atunci două regiuni vecine oarecare ale descompunerii $n+1$ vor fi colorate diferit. Deoarece pentru $n=1$, două culori sînt suficiente și am justificat „trecerea de la n la $n+1$", rezultă că două culori sînt suficiente pentru a colora un plan descompus în regiuni de un număr arbitrar de drepte.

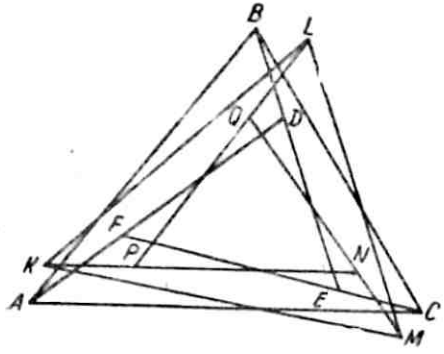


Fig. 144

Aceste raționamente rămîn în vigoare și pentru cazul spațiului descompus în regiuni de n plane.

([73]) Din fig. 144 se vede că două oarecare dintre cele

patru triunghiuri *ABD, BCE, CAF, DEF* au o frontieră comună de forma unui segment de dreaptă. Același lucru este valabil și pentru cele patru triunghiuri *KLP, LMQ, MKN, NPQ*.

În afară de aceasta, oricare din primele patru triunghiuri este acoperit parțial de oricare din ultimele patru triunghiuri (și, bineînțeles, reciproc).

Prin urmare, dacă vom lua deasupra planului desenului punctul *S*, iar dedesubtul acestui plan punctul *T*, două tetraedre oarecare dintre cele opt *SABD, SBCE, SCAF, SDEF, TKLP, TLMQ, TMKN, TNPQ* vor avea o frontieră comună de forma unei porțiuni dintr-o față.

(74) Dacă vom ține seamă de toate cele n_1 drumuri care pornesc dintr-un „nod n_1", de toate cele n_2 drumuri care ies dintr-un „nod n_2" etc. și, în sfîrșit, de toate cele n_s drumuri care pornesc dintr-un „nod n_s", fiecare drum va fi luat în considerație de două ori ; prin urmare, numărul total al drumurilor va fi $\frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_s}{2}$.

Dacă la numărător am avea un număr impar de termeni impari, numărul total al drumurilor ar fi o fracție !

(75) În fig. 118 cele șapte puncte sînt împărțite în două grupuri : *K, L, M, N* și *A, B, C*. Schema drumurilor este de așa fel încît din orice punct al primului grup putem trece direct numai într-un anumit punct al celui de al doilea grup, și invers.

Pentru a parcurge toate punctele trebuie să începem dintr-un punct al primului grup și să-l terminăm într-un alt punct al aceluiași grup ; în schimb, este imposibil ca din punctul final să ajungem direct în punctul inițial.

(76) Dacă vom înscrie într-un octaedru regulat un cub avînd vîrfurile în centrele fețelor octaedrului, atunci trecerea de pe o față pe alta a octaedrului va fi posibilă dacă, și numai dacă, vîrfurile cubului de pe aceste fețe vor fi extremitățile unei muchii a cubului.

Raționamente analoge sînt valabile și pentru dodecaedrul înscris într-un icosaedru regulat.

(77) În fig. 145, *a* săgețile indică cum trebuie să mutăm monedele *A, B, C*.

(78) În fig. 145, *b*, săgețile indică încotro trebuie deplasate monedele *D* și *E*.

(79) Soluția este dată în fig. 145, *c*.

(80) Punctele trebuie așezate în vîrfurile și în centrul unui pentagon regulat (vezi fig. 145, *d*).

([81]) La cele șase puncte din problema precedentă, mai trebuie adăugate cele două puncte A_7 și A_8 așezate pe perpendiculara pe planul desenului care trece prin centrul A_1, trebuind în plus să avem $A_1A_7 = A_1A_8 = A_1A_2$ (ce e drept, unul dintre „triunghiurile" noastre anume $A_1A_7A_8$ va avea unghiul la vîrf de 180°).

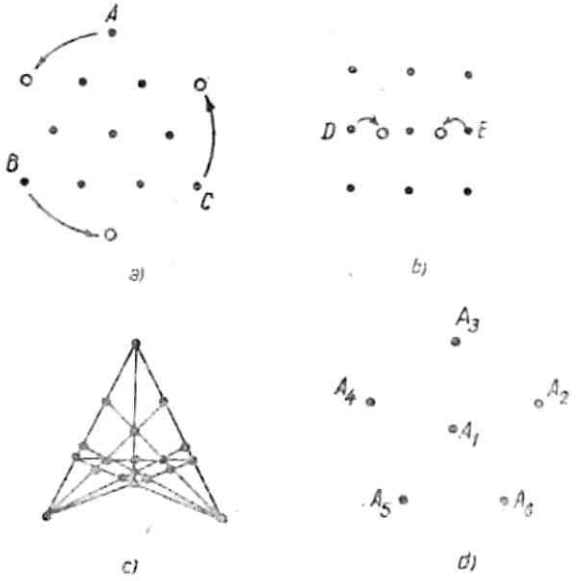


Fig. 145

([82]) Este suficient să demonstrăm că lungimile segmentelor OA, OB, OC, OD, AB, AC, AD, BC, BD, CD sînt egale. De exemplu :

$$AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 0\right)^2 + (0-0)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36} + \frac{6}{9}} = 1,$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{4} - 0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{16} + \frac{10}{16}} = 1, \text{ etc.}$$

([83]) Numărul total de drepte din configurația (p_m, q_n) este egal cu q.

Dacă am ţine seama de cele m drepte care trec prin primul punct, apoi de cele m drepte care trec prin al doilea punct etc. şi, în sfîrşit, de cele m drepte care trec prin al p-lea punct, atunci „am număra" în total pm drepte ; în cazul acesta însă, fiecare dreaptă va fi luată în consideraţie de n ori (deoarece aceeaşi dreaptă trece prin toate cele n puncte), din care cauză avem

$$\frac{pm}{n} = q.$$

([84]) Trebuie avut în vedere că, oricum ar fi Ivanov, la întrebarea profesorului — dacă este serios sau glumeţ — el nu putea da decît un singur răspuns : „Sînt serios". În acest caz însă este clar că Petrov este serios, iar Sidorov glumeţ.

([85]) Dat fiind că dintre numerele 26, 27 şi 28 numai 27 este divizibil prin 3, înseamnă că Galkin şi Komkov au tăiat grinzile de cîte 1,5 m, deci numele lor sînt Petea şi Kostea. Dar Kostea nu figurează printre brigadieri, iar Komkov nu este brigadier, conform enunţului ; deci pe Komkov îl cheamă Kostea.

([86]) Da, putea. În adevăr, din răspunsul lui Andrei, trebuia să fie clar pentru prietenii săi că ei nu pot avea două căciuli albe.

Dacă Vadim ar avea o căciulă albă, Boris ar fi stabilit cu uşurinţă culoarea căciulii sale şi deoarece nu a putut să o facă, înseamnă că Vadim avea o căciulă neagră. Problema se generalizează uşor : putem vorbi despre n prieteni aşezaţi unul în spatele celuilalt şi despre $2n+1$ căciuli (n albe şi $n+1$ negre).

([87]) Presupunînd că Serioja este numărul 2 (adică a ocupat locul al doilea), vom avea : din I — Kolea nu este nr. 3, din IV — Vanea nu este nr. 4, din V — Kolea este nr. 1, din III — Tolea nu este nr. 1, Nadia este nr. 2, adică vom ajunge la o contradicţie : şi Serioja şi Nadia au ocupat locul al doilea.

Presupunînd că Kolea este nr. 3, obţinem : din I — Serioja nu este nr. 2, din IV — Vania este nr. 4, din II — Nadia nu este nr. 3, Tolea este nr. 5, din III — Tolea nu este nr. 1, Nadia este nr. 2 ; prin urmare lui Serioja îi rămîne locul întîi. Aşadar, clasamentul este : Serioja, Nadia, Kolea, Vania, Tolea.

([88]) Dat fiind că ne sînt cunoscuţi trei şahişti, anume unul din Saratov, unul din Moscova şi unul din Kiev, iar vîrstele lor sînt de 21, 22, 23 ani, al patrulea şahist va fi din Fergana şi va avea 20 de ani (studentul *M)* ; el este biolog (deoarece ceilalţi trei şahişti sînt unul matematician, unul chimist unul geolog) şi este în anul IV (deoarece ceilalţi şahişti sînt în anii I, II şi III).

Trecem aceste date la numerele 1, 2 şi 3 în tabela unde condiţiile problemei sînt tipărite cu litere grase. La nr. 4 vom scrie că *B* este chimist (deoarece *C* şi *D*, care sînt tot din Kiev, urmează biologia şi matematica, iar studentul *J* are 21 de ani şi este geolog).

Sub numerele 5—14 sînt trecute în tabela datelor uşor de determinat despre specialităţile celorlalţi studenţi. Apoi la nr. 15 notăm: chimistul I din Saratov este în anul întîi (deoarece *J* din Saratov este în anul III, chimistul *G* este în anul II iar *M* în vîrstă de 20 de ani, este în anul IV). La fel determinăm (sub nr. 16—26) anul celorlalţi studenţi.

Vîrsta / Oraşul	20 ani	21 ani	22 ani	23 ani
Kiev	*A geol.*, (5) II, fotbal (17) (28)	*B chim.*, (4) IV, box (18) (29)	*C* biol. III, volei, (22) (30)	*D* mat., *I*, şah
Moscova	*E* mat., (6) III, box (16) (27)	*F* biol., (13) I, fotbal (19)	*G* chim., II, şah	*H* geol., (12) IV, volei (26) (31)
Saratov	*I* chim., (7) I, volei (15)	*J* geol., *III*, şah	*K* mat., (8) IV, fotbal (21) (33)	*L* biol., (9) II, box (25) (34)
Fergana	*M* biol., (2) IV, şah (3) (1)	*N mat.*, (14) II, volei (20) (32)	*O* geol., (10) I, box (23) (35)	*P* chim., (11) III, fotbal (24) (36)

Moscovitul *E*, în vîrstă de 20 de ani, este boxer (nr. 27), deoarece moscoviţii *F* şi *G* sînt respectivi fotbalist şi şahist, iar *H* joacă volei. Mai departe, sub nr. 28—36 sînt indicate disciplinele sportive practicate ale studenţilor (de exemplu nr. 29 *B* este boxer, deoarece *A* şi *D*, care sînt şi ei din Kiev, joacă respectiv fotbal şi şah, iar chimistul I este voleibalist etc.).

(89) 1)
$$\begin{array}{r|l} ******=*** & \\ * & \\ \hline *** & \\ ** & \\ \hline 4*** & \\ **** & \\ \hline 90 & \end{array}$$

Se vede imediat că prima cifră a rădăcinii căutate este 3, deoarece pătratul ei este un număr de o singură cifră şi ea este rezultatul extragerii rădăcinii din grupa de ordin cel mai mare, formată din

două cifre. A doua cifră a rădăcinii căutate nu poate fi decît 1, deoarece 62×2 ar da un produs de trei cifre și nu de două (vezi cele două steluțe din linia a patra). În sfîrșit, din $62z\times z=4$ rezultă că z (ultima cifră a rădăcinii căutate) nu poate fi decît 7.

2)
$$\begin{array}{r|l} ****** & *** \\ **** & \overline{*8*} \\ \hline *** & \\ *** & \\ \hline **** & \\ **** & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Se vede imediat că această împărțire are cîtul 989, deoarece produsul împărțitorului prin 8 este un număr de trei cifre, iar produsul lui prin cifrele extreme ale cîtului dă numere de cîte patru cifre (vezi liniile a 4-a, a 2-a și a 6-a ale schemei împărțirii). Să notăm întregul împărțitor cu z. Atunci $8z<1\,000$ și $9z\geqslant 1\,000$, adică $111<z<125$. Pentru $z=112$, deîmpărțitul egal $989\cdot 112=110\,768$, iar împărțirea numărului 110 768 prin 112 se face exact după schema de mai sus. Însă pentru $z=113$, 114 etc., primul rest nu ar fi de două cifre cum rezultă din schemă ci de trei cifre ; de exemplu,

pentru $z=113$ avem : $\begin{array}{r} 111\,757 \quad (=989.113) \\ \underline{1\,017 \quad (=113.9)} \\ 100 \end{array}$

pentru $z=114$: $\begin{array}{r} 112\,746 \quad (=989.114) \\ \underline{1\,026 \quad (=114.9} \\ 101 \end{array}$

etc. Așadar, soluția unică este 110 768 : 112 = 989.

3)
$$\begin{array}{r} c\ \mu\ e\ x\ + \\ \gamma\ p\ o\ \mu \\ \hline \gamma\ p\ e\ \mu\ u \end{array}$$

Se vede imediat că $\gamma=1$. De aceea $p\neq 1$; însă p nu poate fi și mai mare decît 1, deoarece pentru $p=2$, chiar cînd $c=9$ adunarea în ordinul sutelor ar trebui să ne dea „2 în gînd" ceea ce este imposibil. Așadar, $p=0$.

Se vede ușor că $\mu<9$, deoarece pentru $\mu=9$, examinînd adunarea în ordinul sutelor am obține $e=0$ ceea ce este imposibil deoarece $p=0$. Prin urmare, $\mu<9$ și $e=\mu+1$.

Evident, $c=9$. Cercetînd însă adunarea la ordinul zecilor obținem $o=8$, deoarece $e=\mu+1$ și $o\neq c=9$. Așadar, avem

$$\begin{array}{r} 9\mu e\times \\ 180\mu \\ \hline 10e\mu u \end{array}$$

Analizînd cele cinci variante $\mu=2, 3, 4, 5, 6$, constatăm ușor că numai $\mu=5$ nu ne duce la o contradicție și ne dă $9\,567+1\,085=10\,652$.

4) $$\begin{array}{r} forty \\ +\ ten \\ \ \ ten \\ \hline sixty \end{array}$$

Se stabilește ușor că $n=0$ și $e=5$. Deoarece $i\neq 0$, avem $i=1$ (pentru $i=1$, chiar dacă avem $o=9$ adunarea în ordinul sutelor ar trebui să ne dea „trei în gînd", ceea ce este imposibil). Din aceeași cauză avem $o=9$. Așadar,

$$\begin{array}{r} f9rty \\ +\ t50 \\ \ \ t50 \\ \hline s1xty \end{array}$$

Prin urmare $s=f+1$ și la ordinul sutelor avem „2 în gînd". Însă pentru $f=7$ și $s=8$ vom avea la ordinul sutelor cel mult $4+6+6+1=17<20$. Pentru $f=6$ și $s=7$, putem obține la ordinul sutelor $8+8+4+1=21$ sau $8+8+3+1=20$, dar în acest caz x coincide fie cu i, fie cu n.

Se verifică ușor că pentru $f=3$ și $s=4$, x coincide în toate variantele cu una dintre „cifrele" s, f, i, n.

Numai pentru $f=2$, $s=3$ și $r=7$, $t=8$, căpătăm pentru x o valoare care nu coincide cu a nici uneia dintre celelalte „cifre" : $x=4$ și atunci $y=6$.

Așadar, soluția unică este $29\,786+850+850=31\,486$.

(90) 1) Traversează : *Aa AB ab*

Revin : *A a*

2) Traversează : *abc AB BCD abc cd*

Revin : *c Bb a c*

3) Traversează : *abc cde ABC CDE bcd de*

Revin : *c de cC bd d*

([91]) Prima metodă ne dă : $(20, 0, 0) \to (7, 13, 0) \to (7, 4, 9) \to$ $\to (16, 4, 0) \to (16, 0, 4) \to (3, 13, 4) \to (3, 8, 9) \to (12, 8, 0) \to$ $\to (12, 0, 8)$. Deoarece am ajuns la poziția $(b - 1, 0, c - 1)$, prima metodă nu este bună.

A doua metodă ne dă : $(20, 0, 0) \to (11, 0, 9) \to (11, 9, 0) \to$ $\to (2, 9, 9) \to (2, 13, 5) \to (15, 0, 5) \to (15, 5, 0) \to (6, 5, 9) \to$ $\to (6, 13, 1) \to (19, 0, 1) \to (19, 1, 0) \to (10, 1, 9) \to (10, 10, 0)$, adică ne conduce la țintă.

([92]) Prima metodă dă : $(16, 0, 0) \to (4, 12, 0) \to (4, 5, 7) \to$ $\to (11, 5, 0) \to (11, 0, 5)$; ea nu este potrivită deoarece ne conduce la poziția $(b - 1, 0, c - 2)$.

A doua metodă ne dă : $(16, 0, 0) \to (9, 0, 7) \to (9, 7, 0) \to$ $\to (2, 7, 7) \to (2, 12, 2) \to (14, 0, 2) \to 14, 2, 0) \to (7, 2, 7) \to$ $\to (7, 9, 0) \to (0, 9, 7) \to (0, 12, 4) \to 12, 0, 4) \to 12, 4, 0) \to$ $\to (5, 4, 7) \to (5, 11, 0)$. Deoarece am ajuns la o poziție în care nu putem umple vasul mic (din cel mare) și nu putem turna înapoi în vasul cel mare o cantitate egală cu capacitatea vasului mijlociu, înseamnă că nici metoda a doua nu este bună pentru a împărți lichidul în două părți egale.

([93]) Piramida circumscrisă are latura bazei egală cu $2n+1$, iar înălțimea cu $n + \frac{1}{2}$ (cu condiția ca cuburile centrale ale tuturor straturilor să fie pe aceeași coloană).

Prin urmare,

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-3)^2+(2n-1)^2=\frac{(2n+1)^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{3}-$$

$$-2\left[(2n-1)+(2n-3)+\ldots+5+3+1\right]-4n.\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

([94]) Numărul pătratelor este de 31, al triunghiurilor de 124, al dreptunghiurilor (inclusiv pătratele) de 87.

([95]) 35 de triunghiuri.

([96]) Numărul triunghiurilor este de 78, al hexagoanelor regulate de 11, al romburilor de 66.

([97]) 1) Fie $N_1(m.n)$ numărul de pătrate, iar $N_2(m,n)$ numărul de dreptunghiuri care se pot vedea pe o tablă cu $m \times n$ cîmpuri.

Dacă $m \leqslant n$ și dacă a este latura unui cîmp al tablei de șah, atunci vom avea pe tabla cu $m \times n$ cîmpuri : m coloane de lățimea a, avînd fiecare cîte n pătrate de latură a, $m - 1$ coloane de lățimea $2a$, conținînd fiecare cîte $n - 1$ pătrate de latură $2a$, $m - 2$ coloane cu lățimea $3a$, conținînd $n - 2$ pătrate de latură $3a$ etc., în sfîrșit,

într-o coloană de lățimea ma, avem $n-m+1$ pătrate de latură ma. Prin urmare ;

$$N_1(m, n) = mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \ldots + 2(n-m+2) + 1(n-m+1).$$

Dintr-o tablă cu $m \times n$ cîmpuri, putem alege o coloană de o lățime dată în $\frac{m(m+1)}{2}$ feluri. Dacă alegem însă o coloană concretă, putem vedea în ea $\frac{n(n+1)}{2}$ dreptunghiuri cu bazele egale cu lățimea coloanei (n dreptunghiuri de înălțime a, $n-1$ de înălțime $2a$ etc., în sfîrșit, două dreptunghiuri de înălțime $(n-1)a$ și unul de înălțime na).

Prin urmare, $N_2(m, n) = \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. În particular,

$$N_1(n, n) = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 3^2 + 2^2 + 1^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$N_1(8,8) = 204$; $N_2(n,n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$; $N_2(8,8) = 1\,296$.

2) La baza unui cub cu muchia de 10 cm, putem alege în $(10-k+1)^2$ moduri un pătrat cu latura de k cm. În coloana cu baza astfel aleasă, avem $(10-k+1)^3$ cuburi cu muchia de k cm. Prin urmare, în cubul cu muchia de 10 cm, putem „vedea" $(10-k+1)^3$ cuburi cu muchia de k cm. Dat fiind că numărul k poate avea orice valoare cuprinsă între 1 și 10, putem vedea totdeauna într-un cub cu muchia de 10 cm, 3 025 cuburi diferite

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3).$$

Dat fiind că un dreptunghi oarecare poate fi ales în baza unui cub cu muchia de 10 cm în 3 025 ($= N_2(10, 10) = 55^2$) moduri, iar dacă luăm o coloană cu o bază concretă, putem vedea în ea 55 de paralelipipede dreptunghice cu baza pe care am ales-o $(10+9+8+\ldots+2+1)$, rezultă că în cubul cu muchia de 10 cm, putem vedea 55^3 paralelipipede dreptunghice diferite.

([98]) În 44 de moduri.

([99]) Adunînd membru cu membru identitățile

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}, \\ \sin 2\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sin n\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}, \end{array}\right.$$

obținem :

$$(\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}=\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2},$$

de unde

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

(100) $[3(10^k+10^{k-1}+\ldots+10+1)n+1]^2=$

$$=\left[\frac{n(10^{k+1}-1)}{3}+1\right]^2=\frac{n^2(10^{2k+2}-2\cdot 10^{k+1}+1)}{9}+$$

$$+\frac{2n(10^{k+1}-1)}{3}+1=n^2\frac{10^{2k+2}-10^{k+1}}{10-1}+(6n-n^2)\frac{10^{k+1}-1}{10-1}+$$

$$+1=n^2(10^{2k+1}+10^{2k}+\ldots+10^{k+1})+$$

$$+(6n-n^2)(10^k+10^{k-1}+\ldots+1)+1.$$

(101) Deoarece după cele două turnări dintr-un vas în altul, volumul lichidului din primul pahar nu se schimbă, volumul alcoolului trecut în primul pahar va fi egal cu volumul apei vărsate în al doilea pahar (observația în legătură cu „amestecarea cu grijă" ar trebui folosită în cazul rezolvării aritmetice — mai lungi ! — care ne-ar permite însă, ce e drept, să determinăm și cantitatea amestecului din fiecare pahar).

(102) Portretul din perete era al fiului lui Petrov (răspunsul încîlcit al lui Petrov ar putea fi simplificat astfel : „Tatăl celui din perete sînt eu").

(103) Dat fiind că fiecare om a avut 8 străstrăbunici și 8 străstrăbunice, iar fiecare dintre aceste 16 persoane avea cîte 16 strămoși direcți, în „a patra generație", numărul căutat este 256 ($=16\times 16$).

Numărul de strămoși direcți în „a 8-a generație" va fi mai mic decît 256 ; de exemplu, dacă în rîndurile lor au existat cazuri de căsătorii între veri secundari etc.

(104) 15′ ; dacă unim două puncte oarecare A și C de pe laturile unghiului ABC atunci, privind printr-o lupă vom vedea triunghiul asemenea $A'B'C'$ avînd aceleași unghiuri ca și triunghiul ABC.

(105) Cu 25% (dacă, de exemplu, înainte de reducerea prețurilor un kg de cartofi costa a ruble, atunci, după reducere el va costa

0,8 a ruble, deci pentru a ruble se vor putea cumpăra 1,25 kg cartofi).

([105a]) Cu 50% (dacă înainte de reducere se puteau cumpăra pentru 100 ruble, să zicem b kg de cartofi, după prima reducere se puteau cumpăra pentru 100 ruble 1,2 b kg, iar după a doua reducere $1{,}2 \cdot 1{,}25b = 1{,}5\, b$ kg).

([106]) De 44 ori (în timp de 24 ore minutarul face 24 de rotaţii iar acul orar 2 rotaţii ; prin urmare, minutarul ajunge din urmă şi întrece orarul de 22 ori, iar între două „depăşiri" acele formează de cîte două ori un unghi drept).

([107]) Să admitem că la momentul considerat Kolea are x ani, iar Olea y ani. Din enunţul problemei rezultă că mătuşa Polea avea $x+y$ ani cînd Kolea avea y ani, adică mătuşa Polea este cu x ani mai mare decît Kolea sau, în momentul de faţă, ea are $2x$ ani ; cu x ani în urmă ea era „de vîrsta lui Kolea", iar Kolea era un copil nou născut.

([108]) Pilotul a văzut un urs alb, deoarece din condiţia $AB = AC$ rezultă că punctul A era Polul Nord (A putea fi şi în vecinătatea Polului Sud, vezi nota (121), dar acolo nu trăiesc urşi).

([109]) Să notăm cu 10 $a+b$ ($0 \leqslant b \leqslant 9$) numărul boilor. A şi B au obţinut din vînzarea lor $100a^2 + 20ab + b^2$ ruble. Partea $100a^2 + 20ab$ din suma obţinută au împărţit-o în jumătate luînd rînd pe rînd cîte 10 ruble. În restul sumei (b^2 ruble) numărul zecilor trebuie să fie impar, deoarece atunci cînd A a luat ultima dată 10 ruble a rămas mai puţin decît 10 ruble.

Deoarece pentru $0 \leqslant b \leqslant 9$ avem $b^2 = 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$ şi numai în numerele 16 şi 36 numărul zecilor este impar, înseamnă că au rămas şase ruble. Din ecuaţia $10 - x = 6 + x$ aflăm că punga valora 2 ruble.

([110]) Să admitem că soţii au cumpărat s, x, z obiecte iar soţiile lor respectiv t, y, w obiecte. Atunci $s^2 - t^2 = x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = 45$ sau $(s+t)(s-t) = (x+y)\cdot(x-y) = (z+w)(z-w) = 45$.

Însă numărul 45 poate fi descompus în doi factori numai în două moduri : $45 = 45 \cdot 1 = 15 \cdot 3 = 9 \cdot 5$. Din ecuaţiile $s+t=45$ şi $s-t=1$, obţinem $s=23$ şi $t=22$. Analog găsim $x=9$, $y=6$ şi $z=7$, $w=2$. Prin urmare, soţii au cheltuit : Iuri 529 ruble, Aleksandr 81 ruble, Loghin 49 ruble, iar soţiile respectiv : Tatiana 484 ruble, Nina 36 ruble şi Olga 4 ruble.

([111]) Fie x ruble întreaga sumă de bani în cazul general (cînd se adaugă de fiecare dată $\frac{1}{n+1}$ din rest).

Atunci $1 + \frac{x-1}{n+1} = 2 + \frac{x - 3 - \frac{x-1}{n+1}}{n+1}$ de unde $x = n^2$.

Partea primului copil (în ruble) este $1+\frac{n^2-1}{n+1}=n$, a celui de al doilea $2+\frac{n^2-n-2}{n+1}=2+(n-2)=n$, a celui de al treilea este $3+\frac{n^2-2n-3}{n+1}=3+(n-3)=n$ etc. Dacă vom presupune că primii k copii au primit cîte n ruble, atunci partea celui de al $(k+1)$-lea va fi $k+1+\frac{n^2-kn-(k+1)}{n+1}=k+1+n-(k+1)=n$. De aici rezultă că fiecare dintre cei n copii a primit cîte n ruble.

([112]) Dacă Gleb a mers pe jos x km (la sfîrşitul drumului), înseamnă că Pavel a parcurs tot atîta pe jos la începutul drumului (ei au ajuns la N în acelaşi timp !)

Pe cînd Gleb a parcurs x km cu viteza de u km/h, Iuri a parcurs cu viteza de v km/h $2s-3x$ km ($s-2x$ în întîmpinarea lui Pavel şi $s-x$ km ajungîndu-l din urmă pe Gleb). Prin urmare, $\frac{x}{2s-3x}=\frac{u}{v}$ de unde $x=\frac{2su}{v+3u}$ iar timpul necesar a fost de $\frac{x}{u}+\frac{s-x}{v}=\frac{s(u+3v)}{v(v+3u)}$ ore.

([113]) Cercul cadranului ceasornicului este împărţit în 60 de diviziuni de cîte 1 minut. Să admitem că şedinţa a început la $4^h x^{min}$, iar sfîrşitul ei a fost la $7^h y^{min}$. Deoarece acul orar se mişcă de 12 ori mai încet decît minutarul, avem două ecuaţii $\begin{cases} x=12\ (x-20), \\ y=12\ (x-35), \end{cases}$ de unde $x=\frac{5280}{143}=x_0$, $y=\frac{3360}{143}=y_0$.

Se verifică uşor că $x_0-30=30-y_0$ (vezi fig. 146).

([114]) Dacă indicaţiile ceasornicului îşi păstrează sensul, atunci cînd schimbăm între ele acul orar şi minutarul în poziţiile „$m^h x^{min}$“ şi „$n^h y^{min}$“, vom avea $\begin{cases} x=12\,(y-5m) \\ y=12\,(x-5n) \end{cases}$ de unde $x=\frac{60(n+12n)}{143}$, $y=\frac{60(n+12m)}{143}$.

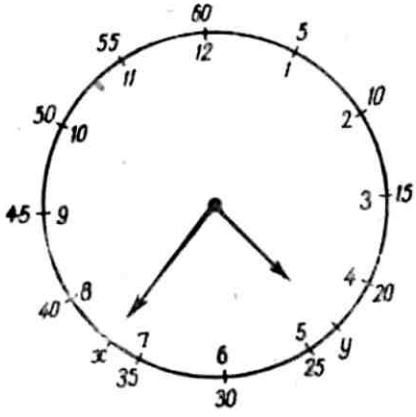


Fig. 146

Deoarece m şi n variază de la 0 pînă la 11 inclusiv, vom obţine pentru fiecare pereche de numere m, n ($m \neq n$) două momente cînd acele pot fi permutate „fără pagubă“. În 12 ore vom avea 132 ($2.C_{12}^2$) momente de acest fel, iar în 24 de ore, 264 momente.

În afară de aceasta, în timp de 24 ore, acul orar și minutarul „coincid" de 22 ori, adică le putem „permuta" fără a schimba poziția fiecărui ac.

([115]) Orice număr n cu s cifre este cuprins între 10^{s-1} și 10^s, adică $10^{s-1} \leqslant n < 10^s$. În total avem 9.10^{s-1} numere de cîte s cifre, iar numărul lor total de cifre este $9s.10^{s-1}$. În toate numerele cu s cifre, prima cifră (a ordinului celui mai mare) este diferită de zero, pe cînd în celelalte ordine ale numărului atît zero cît și restul cifrelor apar de același număr de ori. Prin urmare, numărul zerourilor în toate numerele de cîte s cifre este $\frac{9s \cdot 10^{s-1} - 9 \cdot 10^{s-1}}{10} = 9\,(s - 1).10^{s-2}$ (egal cu numărul tuturor cifrelor în toate numerele cu $s - 1$ cifre).

Dacă N_1 este numărul total de cifre al șirului de numere 1, 2, 3, ..., $10^k - 1$, 10^k, iar N_2 numărul total de zerouri din șirul 1, 2, 3, ..., $10^{k+1} - 1$, 10^{k+1}, atunci $N_1 = N_2 = 9 + 9.2.10 + 9.3.10^2 + \ldots + 9.k.10^{k-1} + k + 1$ ($k+1$ este numărul de cifre ale numărului 10^k sau numărul de zerouri din numărul 10^{k+1}).

([116]) Punînd în mod arbitrar figura S pe o hîrtie (fig. 147), transportăm în gînd prin translație toate celulele ocupate parțial de ea într-o anumită celulă ω. În acest caz, porțiunile pe care le ocupă figura se pot suprapune parțial.

În ω se va găsi neapărat un punct A neocupat de porțiunile figurii S. Punctele A_1, A_2, ..., care ocupă aceeași poziție în celelalte celule, ca și A în celula ω, nu vor fi ocupate de figură și este suficient să mutăm hîrtia de sub figura S, așezînd nodurile ei în punctele situate sub A, A_1, A_2 etc.

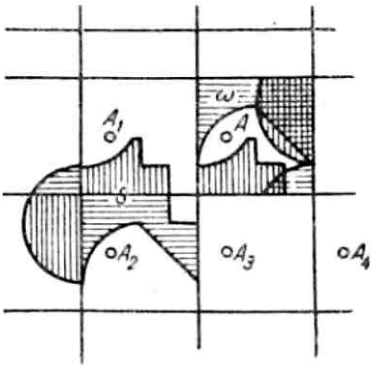


Fig. 147

([117]) Fiind date punctul A și două drepte oarecare în spațiu l_1 și l_2, este posibil, în general, să ducem o dreaptă m care să treacă prin punctul A și să taie dreptele l_1 și l_2 (aceasta este imposibil în cazurile excepționale cînd $l_1 \parallel l_2$ și A nu este în planul care trece prin l_1 și l_2) : este suficient să ducem planele care trec prin A și l_1 și prin A și l_2, care se vor intersecta după dreapta m căutată.

Alegînd în diverse moduri punctul A și l_3, vom obține o infinitate de drepte m_1, m_2, ..., secante fiecare cu dreptele l_1, l_2, l_3.

Dreptele m_1, m_2, m_3, ... formează ceea ce se cheamă o suprafață riglată, cu care dreapta l_4 se taie, în general, într-un punct B situat pe una dintre dreptele m_i. Această dreaptă va intersecta și dreptele l_1, l_2, l_3, l_4.

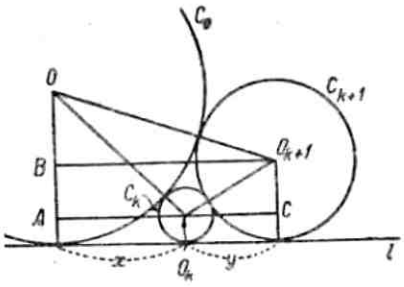


Fig. 148

(118) Fie R_s raza cercului C_s $(O \leqslant s \leqslant 1000)$, O centrul cercului C_0 și O_m centrul cercului C_m $(1 \leqslant m \leqslant 1000)$.

Razele cercurilor C_0, C_k, C_{k+1} sînt legate între ele prin relația

$$R_{k+1}=\frac{R_0 R_k}{(\sqrt{R_0}-\sqrt{R_k})^2}; \qquad (1)$$

(din triunghiul $OO_k A$ (vezi fig. 148) avem $(R_0+R_k)^2-(R_0-R_k)^2=x^2$ sau $x=2\sqrt{R_0 R_k}$; analog, din triunghiurile $OO_{k+1} B$ și $O_k O_{k+1} C$ obținem $x+y=2\sqrt{R_0 R_{k+1}}$ și $y=2\sqrt{R_k R_{k+1}}$; prin urmare,

$$\sqrt{R_0 R_{k+1}}-\sqrt{R_k R_{k+1}}=\sqrt{R_0 R_k}).$$

Exprimînd în km lungimile razelor vom avea $R_0=1$, $R_1=10^{-6}$. Potrivit formulei (1), pentru $k=1$, obținem

$$R_2=\frac{1\cdot 10^{-6}}{(1-10^{-3})^2}=\frac{1}{999^2},$$

iar pentru $k=2$

$$R_3=\frac{1}{999^2}:\left(1-\frac{1}{999}\right)^2=\frac{1}{998^2}.$$

Presupunînd că

$$R_m=\frac{1}{(1000-m+1)^2}, \qquad (2)$$

formula (1) ne dă $R_{m+1}=\frac{1}{(1000-m)^2}$ (trecerea de la m la $m+1$) și deoarece formula (2) este adevărată pentru $m=1$ ea este adevărată și pentru orice m care nu depășește 1 000, deoarece pentru $m=1\,000$, ea ne dă $R_{1000}=1$ și deci cercul C_{1001} nu poate fi construit.

([119]) Să admitem că direcția razei m „incidente" pe planul Oxy este caracterizată prin vectorul unitate $e = \overrightarrow{AO} = (e_x, e_y, e_z)$ (în paranteze sînt date componentele paralele cu axele de coordonate ale vectorului e). Raza m', reflectată pe planul Oxy (sau pe un plan paralel cu Oxy) va avea vectorul unitate $e_1 = (e_{x1}\ e_y - e_x)$, adică se schimbă numai sensul componentei paralele cu axa Oz (fig. 149).

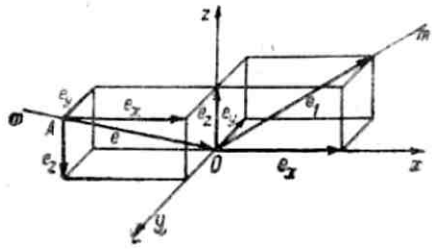


Fig. 149

Razele m'' și m''', care se obține după reflectarea razei m' de un plan paralel cu Oxz și a razei m'' de un plan paralel cu Oyz, vor avea vectorii unitate $e_2 \equiv (e_x, -e_y, -e_z)$ și $e_3 = (-e_x, -e_y, -e_z)$. Prin urmare, $m''' = m$ și direcția razei m''' este opusă sensului razei m.

([120]) Componentele α, β, γ (paralele cu muchiile paralelipipedului) ale vectorului unitate e (α, β, γ) caracterizînd direcția căutată a razei nu variază ca valoare absolută în urma reflectării pe fețele paralelipipedului. Prin urmare, dacă un punct imaginar se mișcă după „raza incidentă" și după toate razele reflectate, deplasările lui totale în direcția fiecăreia dintre axele Ox, Oy, Oz (considerînd pozitive deplasările în sus și în jos, în dreapta și în stînga, „spre noi" și „de la noi") vor fi proporționale cu numerele $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$.

Dar în momentul revenirii punctului — după reflectarea pe toate fețele — la punctul inițial, aceste deplasări vor fi egale cu dublu lungimilor muchiilor a, b, c ale paralelipipedului, deci $|\alpha| : |\beta| : |\gamma| = a : b : c$, adică raza luminoasă trebuie trimisă paralel cu una dintre diagonalele paralelipipedului.

Soluția problemei nu se complică aproape de loc dacă vom căuta o rază de lumină care, de exemplu, înainte de a reveni în punctul de plecare, trebuie să se reflecte de cîte trei ori pe fețele din stînga, din dreapta și din spate, de două ori pe fața anterioară, de patru ori pe fața de jos și de cinci ori pe cea de sus. Încercați să faceți raționamentele corespunzătoare, considerînd că distanțele punctului de plecare de la fața din stînga, cea anterioară și cea de jos ale paralelipipedului sînt egale cu a', b', c'.

([121]) Soluția evidentă : A este polul nord ; soluții mai puțin evidente : A este un punct oarecare al emisferei sudice situat pe paralela l', aflată la 2 000 km în nordul paralelei l, a cărei lungime este $\frac{2\,000}{n}$ km (n natural).

([122]) Deoarece avionul a zburat a km spre est și a ajuns la distanța de $3a$ km spre est de Leningrad, înseamnă că a zburat spre est pe „paralela φ" a cărei rază r_1 este de trei ori mai mică decît raza r a paralelei Leningradului (60° latitudine nordică) ; prin urmare, $R\cos\varphi = r_1 = \frac{r}{3} = \frac{R\cos 60°}{3} = \frac{R}{6}$, de unde $\varphi \approx 80°30'$ (în fig. 150 este dată proiecția emisferei nordice pe un plan paralel cu axa Pămîntului). Prin urmare, a este lungimea arcului de meridian dintre „paralela 60°" și „paralela 80°30'", adică $a \approx \approx \frac{40\,000 \text{ km} \cdot 20{,}5}{360} \approx 2\,278$ km.

([123]) Trebuie luat în considerare că suma unghiurilor unui triunghi sferic ABC este întotdeauna mai mare de 180°, iar aria sa se calculează după formula

$$S_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2,$$

unde α, β, γ sînt valorile unghiurilor A, B, C, exprimate în radiani.

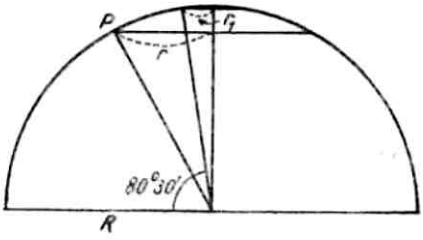


Fig. 150

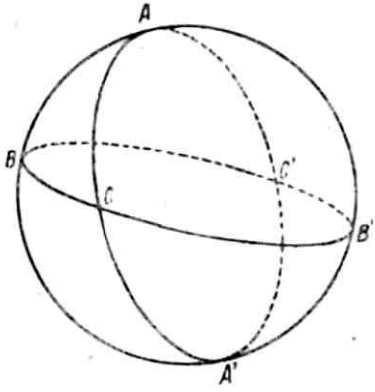


Fig. 151

În adevăr, dacă prelungim o pereche sau alta dintre laturile triunghiului sferic ABC (fig. 151), obținem „fusuri sferice" : $ABA'CA$, $BAB'CB$, $CAC'BC$ ale căror arii sînt

$$S_{ABA'CA} = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi}, \tag{1}$$

$$S_{BAB'CB} = 4\pi R^2 \frac{\beta}{2\pi}. \tag{2}$$

$$S_{CAC'BC} = S_{ABC} + S_{ABC'} = 4\pi R^2 \frac{\gamma}{2\pi}.$$

Dacă în ultima egalitate înlocuim $S_{ABC'}$ prin $S_{A'B'C}$, căpătăm

$$S_{ABC}+S_{A'B'C'}=4\pi R^2\cdot\frac{\gamma}{2\pi}. \tag{3}$$

(laturile triunghiurilor sferice ABC' și $A'B'C$ sînt egale două cîte două și, deși în general aceste triunghiuri nu pot fi făcute să coincidă prin suprapunere, se poate demonstra că $S_{A'B'C}=S_{ABC'}$).

Adunînd membru cu membru egalitățile (1), (2), (3), obținem

$$2S_{ABC}+2\pi R^2=2R^2(\alpha+\beta+\gamma),$$

de unde rezultă

$$S_{ABC}=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2.$$

De exemplu, în triunghiul DEF, format de arcele de meridian DE și DF care se intersectează sub un unghi drept și de arcul de ecuator EF, fiecare unghi este de $\pi/2$. Prin urmare,

$$S_{DEF}=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\pi\right)R^2=\frac{\pi R^2}{2}$$

adică tocmai o optime din aria întregii sfere).

([124]) Deoarece raza Pămîntului este $R\approx 6370$ km, iar aria triunghiului sferic dat este ABC — $S\approx\frac{\sqrt{3}}{4}$ km^2, obținem, punînd $\sphericalangle A=\sphericalangle B=\sphericalangle C=\alpha$ radiani (vezi nota precedentă : $3\alpha-\pi=\frac{S}{R^2}\approx\frac{\sqrt{3}}{4\cdot 6370^2}$ rad. Înmulțind membrul drept cu $\frac{180\cdot 60\cdot 60}{\pi}$ pentru a transforma în secunde căpătăm $\sphericalangle=A\sphericalangle B=\sphericalangle C\approx 60^\circ$. $O'O''$, 0007.

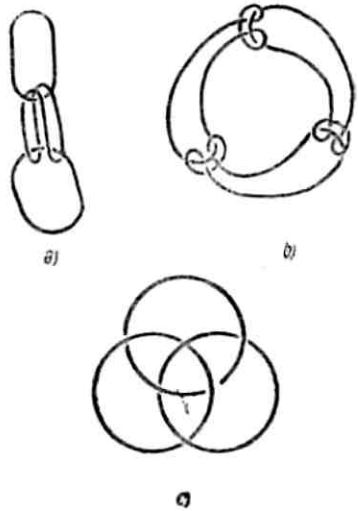


Fig. 152

([125]) Fig. 152. prezintă trei moduri de înlănțuire a trei inele de sfoară ; primele două moduri pot fi ușor folosite și pentru a înlănuți n inele, în așa fel încît rupînd oricare dintre ele, celelalte inele să poată fi desfăcute fără altă ruptură.